PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 5 : POT-POURRI

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 27 MARS 2021

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2006 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soient a et b des entiers positifs impairs tels que $a^b b^a$ est un carré parfait. Montrer que ab est un carré parfait.

Solution de l'exercice 1 Une manière de résoudre cet exercice est de se rappeler qu'un nombre entier est un carré parfait si et seulement si sa valuation $p-$adique est paire pour tout nombre premier p. Or

$$\begin{aligned} v_p(a^b b^a) &= a v_p(b) + b v_p(a) \\ &\equiv v_p(a) + v_p(b) \pmod 2 \quad \text{car } a \text{ et } b \text{ sont impairs} \\ &= v_p(ab) \pmod 2. \end{aligned}$$

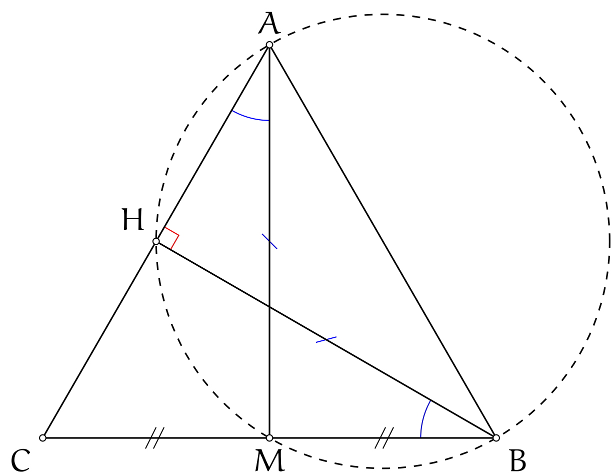
Dès lors, si $a^b b^a$ est un carré parfait, il en est de même de ab.

Sinon, on peut écrire a et b sous la forme $a = 2x+1$ et $b = 2y+1$, avec x et y des entiers. Si $a^b b^a$ est un carré parfait, on peut écrire $a^b b^a = c^2$ avec c entier. On remarque alors que $c^2 = (a^y b^x)^2 ab$, ce qui prouve que ab est nécessairement le carré d'un entier.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est bien compris dans l'ensemble.

Exercice 2. Dans un triangle acutangle ABC, la médiane $[AM]$ issue de A a la même longueur que la hauteur $[BH]$ issue de B, et $\widehat{MAC} = \widehat{HBC}$. Montrer que ABC est un triangle équilatéral.
Un triangle est dit acutangle si tous ses angles sont aigus.

Solution de l'exercice 2



L'égalité d'angle $\widehat{MAC} = \widehat{HBM}$ nous donne que les points H, A, B et M sont cocycliques d'après le théorème de l'angle inscrit.
On a alors, toujours par le théorème de l'angle inscrit, que $\widehat{AMB} = \widehat{BHA} = 90°$. La médiane (AM) est donc aussi une hauteur du triangle ABC. Par conséquent, le triangle ABC est isocèle en A.
Les triangles ACM et HBC sont tous les deux rectangles et $\widehat{MAC} = \widehat{HBC}$ donc ces deux triangles sont semblables. Puisque $AM = HB$, ils sont isométriques et $BC = AC$. Finalement, on a bien $AC = BC = AB$ et le triangles ABC est équilatéral.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est bien résolu.

Exercice 3. Trouver tous les réels x, y et z tels que

$$\begin{cases} x^2 - 4y + 7 = 0 \\ y^2 - 6z + 14 = 0 \\ z^2 - 2x - 7 = 0 \end{cases}$$

Solution de l'exercice 3 Il ne s'agit bien sûr pas de déployer une technique de calcul non conventionnelle pour résoudre un système d'équations polynômiales, mais plutôt de combiner astucieusement les différentes équations.

Soit (x, y, z) un triplet solution du système. Une façon simple de combiner les équation est par exemple d'en faire la somme, afin de regrouper les termes en x, les termes en y et les termes en z et de compléter les carrés. Ici, cela donne :

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 4y + 7 + y^2 - 6z + 14 + z^2 - 2x - 7 \\ &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 \\ &= (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \end{aligned}$$

Chacun des carrés est positif ou nul, chacun des carrés est donc nul. Si (x, y, z) est solution du système, on a donc $x = 1$, $y = 2$ et $z = 3$.

Réciproquement, on vérifie bien que :

$$\begin{cases} 1^2 - 4 \times 2 + 7 = 0 \\ 2^2 - 6 \times 3 + 14 = 0 \\ 3^2 - 2 \times 1 - 7 = 0 \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution du système est le triplet $(1, 2, 3)$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est très bien réussi, mais peu d'élèves pensent à vérifier leur solution : dans chaque problème où on obtient des solutions sans équivalence, il faut avoir le réflexe de vérifier ses solutions à la fin !

Exercice 4. Trouver tous les entiers positifs x et y tels que $x^2 - 2 \times y! = 2021$.

Solution de l'exercice 4 Comme souvent pour une équation diophantienne, il faut commencer par examiner l'équation modulo des petits nombres bien choisis.
Ici, l'équation vue modulo 2 donne que $x^2 \equiv 2021 \equiv 1 \pmod 2$, donc x est impair. L'équation modulo 3 nécessite une disjonction de cas.

— Si $y \geqslant 3$, alors $y! = 0 \pmod 3$ donc $x^2 \equiv 2021 \equiv 2 \pmod 3$, ce qui est impossible.
— Si $y = 0$ ou 1, alors $x^2 = 2021 + 2 = 2023$ mais 2023 n'est pas un carré donc il n'y a pas de solution.
— Si $y = 2$, alors $x^2 = 2021 + 2 \times 2 = 2025$ et comme $x \geqslant 0$, $x = 45$. Réciproquement, le couple $(45, 2)$ est bien solution de l'équation.

On en conclut que l'unique solution du problème est le couple $(45, 2)$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est globalement bien réussi.

Exercice 5. On considère un $15-$gone de périmètre 21. Montrer qu'il existe 3 sommets formant un triangle d'aire au plus 1.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> On note $A_1, \ldots, A_{15}$ les sommets du $15-$gone (dans l'ordre). On va montrer qu'on peut trouver un i tel que $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ soit d'aire au plus 1 (les indices sont considérés modulo i).

Pour tout indice i, l'aire du triangle $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ est

$$\mathcal{A}_i = \frac{1}{2}A_{i-1}A_i \cdot A_iA_{i+1} \cdot \sin A_{i-1}\widehat{A_iA}_{i+1} \leqslant \frac{1}{2}A_{i-1}A_i \cdot A_iA_{i+1} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{A_{i-1}A_i + A_iA_{i+1}}{2}\right)^2$$

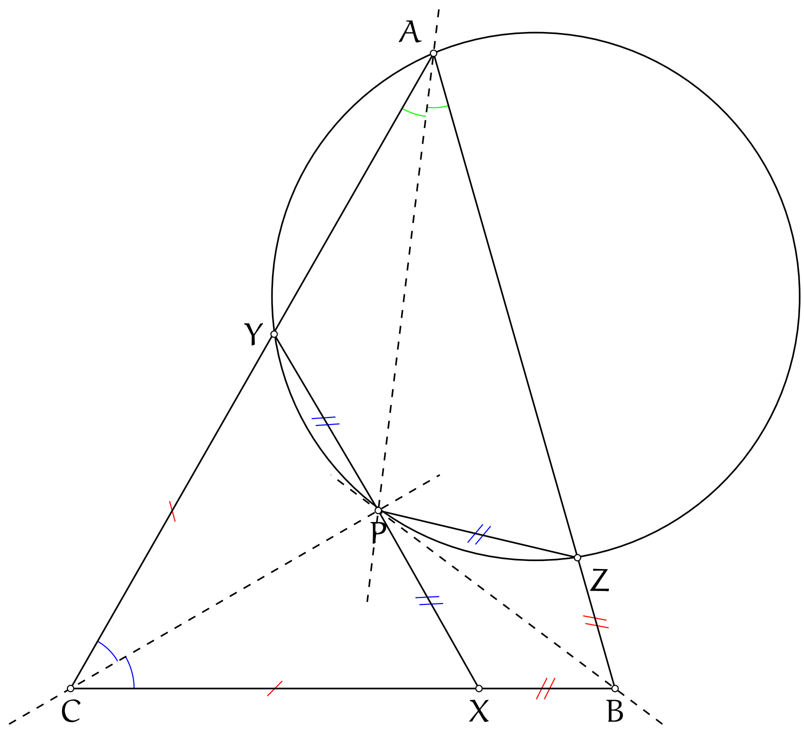
en utilisant que $\sin x \leqslant 1$ pour tout x et l'inégalité des moyennes.

Pour résoudre l'exercice, il suffit donc de trouver un i tel que $A_{i-1}A_i + A_iA_{i+1} \leqslant 2\sqrt{2}$. Par l'absurde, supposons au contraire que $A_{i-1}A_i + A_iA_{i+1} > 2\sqrt{2}$ pour tout i. En sommant cette inégalité pour tout i, il vient $42 = 2(\sum A_iA_{i+1}) > 15 \cdot 2\sqrt{2} > 30 \times 1.4 = 42$, ce qui est absurde.

<u>*Commentaire des correcteurs :*</u> L'exercice est plutôt bien réussi, mais attention à ne pas se placer dans un cas particulier supposé "optimal", par exemple en supposant tous les côtés égaux.

Exercice 6. Soit ABC un triangle, dont $[BC]$ est le côté le plus petit. Montrer qu'il existe un point P tel que, étant donné un point quelconque X sur le segment $[BC]$, si on construit les points Y, Z sur les côtés $[AC]$ et $[AB]$ respectivement de sorte que $CY = CX$ et $BZ = BX$, le cercle circonscrit au triangle AYZ passe par le point P.

Solution de l'exercice 6



Les premières idées proviennent de notre façon de tracer la figure. En effet, étant donné un point X sur le segment $[BC]$, la façon la plus efficace de tracer les points Y et Z est de construire Z comme le symétrique du point X par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ et Y comme le symétrique du point X par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{BCA}$.
En traçant le cercle circonscrit au triangle AYZ, on se rend compte que le point d'intersection des deux bissectrices que l'on a tracées appartient aussi à ce cercle. On peut donc conjecturer (et on le vérifie en traçant la figure pour un second point X par exemple) que le point P recherché est le point d'intersection des bissectrices du triangle ABC. Montrons-le !

Soit X un point quelconque du segment $[BC]$ et soit P le point d'intersection des bissectrices du triangle ABC. D'après notre construction, la droite (BP) est la médiatrice du segment $[XZ]$, on a donc $PX = PZ$. De la même manière, on a $PX = PY$, ce qui conduit à $PY = PZ$. Le point P est donc sur la médiatrice du segment $[YZ]$. Il appartient également, par définition, à la bissectrice de l'angle $\widehat{YAZ}$. Le point P est donc le pôle Sud du sommet A dans le triangle AYZ ! Il appartient donc au cercle circonscrit du triangle AYZ. Comme il ne dépend pas du point X choisi, on a le résultat désiré.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est bien réussi . Très peu d'élèves ont en revanche vu l'intérêt du pôle Sud ici.

Exercice 7. Trouver tous les entiers $n \geqslant 1$ pour lesquels il existe n entiers $a_1, \ldots, a_n$ tels que a_i soit le nombre d'éléments divisibles par i parmi $a_1, \ldots, a_n$.

Solution de l'exercice 7 Soient $n, a_1, \ldots, a_n$ des entiers vérifiant la propriété donnée par l'énoncé. On peut commencer par remarquer que $a_i \leqslant n$ puisqu'il y au plus n éléments parmi $a_1, \ldots, a_n$ divisibles par i quel que soit i.

On établit ensuite un double comptage du nombre de couples (i, a_k) tels que i divise a_k.
D'une part, à a_k fixé, le nombre d'entiers i de $\{1, \ldots, n\}$ divisant a_k correspond à $d(a_k)$, le nombre de diviseurs de a_k. Le nombre de couples (i, a_k) tels que i divise a_k vaut donc $d(a_1) + \ldots + d(a_k)$.
D'autre part, à i fixé, le nombre de a_k tels que i divise a_k correspond précisément à a_i. Le nombre de couples vaut donc $a_1 + \ldots + a_n$.

Ce double comptage peut en fait être résumé par l'interversion de sommes suivante : en notant $1_{i|a_k}$ le nombre qui vaut 1 si i divise a_k et 0 sinon, on a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} 1_{i|a_k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{i|a_k} = \sum_{k=1}^{n} d(a_k)$$

Or, on a l'inégalité $d(x) \leqslant x$ pour tout entier x, avec égalité si et seulement si $x = 1$ ou 2 (en effet, si $x \geqslant 3$, $x - 1$ et x sont premiers entre eux donc x a au plus $x - 1$ diviseurs). On en déduit d'après l'égalité obtenue que chacun des a_k vaut 1 ou 2.
Mais $a_1 = n$ par définition, donc $n = 1$ ou $n = 2$.

— Si $n = 1$, alors $a_1 = 1$ vérifie bien la propriété de l'énoncé.
— Si $n = 2$, alors $a_1 = 2$ et $a_2 = 1$ vérifient la propriété de l'énoncé.

Les entiers n recherchés sont donc $n = 1$ et $n = 2$.
Solution n°2 :
Tout d'abord, notons que chaque a_i est strictement positif. En effet, d'après l'énoncé comme a_i est le nombre de k entre 1 et n tels que i divise a_k, on a $a_i \geqslant 0$ pour tout i. Si de plus $a_i = 0$, on a que i divise a_i donc $a_i \geqslant 1$ ce qui serait absurde. On sait donc que chacun des a_i est strictement positif.
Montrons qu'on a forcément $n \leqslant 2$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons $n \geqslant 3$.
Faisons quelques remarques : on a $a_1 = n$ car 1 divise chaque a_i. De plus, $a_{n-1} > 0$ donc il existe k tel que a_k est divisible par $n - 1$. Or $0 < a_k \leqslant n < 2(n - 1)$ car la dernière inégalité est équivalente à $n > 2$ qui est vraie. En particulier, $a_k = n - 1$.
Soit j un entier tel que a_j est divisible par n. Comme $0 < a_j \leqslant n$, $a_j = n$. On a donc que j divise tous les a_k, donc j divise $a_1 = n$ et $a_k = n - 1$, donc j divise $n - (n - 1) = 1$, donc $j = 1$.
Puisque $a_1 = n$, on a donc $a_n = 1$. De plus, comme $a_k \neq a_1$, on a $k \neq 1$ donc k ne divise pas a_n. On en déduit que k divise tous les a_i sauf a_n. Or $a_k = n - 1 \neq a_n$ donc $k \neq n$, donc k divise $a_1 - a_k = 1$, donc $k = 1$ ce qui est contradictoire.
On en déduit ainsi que $n = 1$ ou 2 et on obtient que ces deux n sont solutions de la même façon que dans la première solution.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est très bien réussi par les quelques élèves qui l'abordent.

Exercice 8. Soient a, b et c des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{a^3+5b^3}{3a+b}+\frac{b^3+5c^3}{3b+c}+\frac{c^3+5a^3}{3c+a}\geqslant \frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

Solution de l'exercice 8 Une idée récurrente pour ce type d'inégalités (somme de fractions polynomiales) est d'utiliser l'inégalité des mauvais élèves qui stipule que, étant donné des nombres réels positifs $a_1,\dots,a_n$ et $b_1\dots,b_n$, on a

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\dots+\frac{a_n^2}{b_n}\geqslant \frac{\left(a_1+\dots+a_n\right)^2}{b_1+\dots+b_n}$$

Ici, on fait apparaître des carrés aux numérateurs en écrivant que

$$\begin{aligned}\frac{a^3+5b^3}{3a+b}+\frac{b^3+5c^3}{3b+c}+\frac{c^3+5a^3}{3c+a} &= \\ &\left[\frac{a^4}{3a^2+ab}+\frac{b^4}{3b^2+bc}+\frac{c^4}{3c^2+ca}\right]+5\left[\frac{b^4}{3ab+b^2}+\frac{c^4}{3bc+c^2}+\frac{a^4}{3ca+a^2}\right]\end{aligned}$$

L'inégalité des mauvais élèves donne alors

$$\begin{aligned}&\frac{a^3+5b^3}{3a+b}+\frac{b^3+5c^3}{3b+c}+\frac{c^3+5a^3}{3c+a}\\ &\qquad\geqslant \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{3(a^2+b^2+c^2)+ab+ac+bc}+\frac{5\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2+b^2+c^2+3(ab+ac+bc)}\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+ac+bc$, il vient

$$\begin{aligned}&\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{3(a^2+b^2+c^2)+ab+ac+bc}+\frac{5\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^2+b^2+c^2+3(ab+ac+bc)}\\ &\qquad\geqslant \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)+\frac{5}{4}(a^2+b^2+c^2)=\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)\end{aligned}$$

Une solution alternative consiste à chercher une inégalité de la forme $\frac{a^3+5b^3}{3a+b}\geqslant \lambda a^2+\mu b^2$ qui soit vraie pour tous réels strictement positifs a et b, avec λ et μ des réels de somme $\frac{3}{2}$. L'inégalité serait alors évidente en sommant.

Puisque l'inégalité est homogène, on peut supposer $b=1$ et on cherche des réels λ et μ tels que le polynôme $P(t)=(1-3\lambda)t^3-\lambda t^2-3\mu t+(5-\mu)$ soit positif sur les réels positifs. Comme $\lambda+\mu=\frac{3}{2}$, P s'annule en 1 (c'est le cas d'égalité $a=b$), et pour que P ne soit pas négatif proche de 1, il faut que 1 soit une racine double de P, donc que $P'(1)=0$. Cela donne l'équation $3\mu+11\lambda=3$. Puisque $\lambda+\mu=\frac{3}{2}$, on doit avoir $\lambda=-\frac{3}{16}$ et $\mu=\frac{27}{16}$. Avec ce choix de λ et μ, on sait alors que P est un polynôme de degré 3 dont le produit des racines est $-(5-\mu)<0$, et donc que P possède une racine négative $\alpha<0$. On peut alors écrire $P(t)=(1-3\lambda)(t-1)^2(t-\alpha)$, ce qui prouve que P est positif pour $t\geqslant 0$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est bien réussi par les quelques élèves l'ayant rendu et les preuves présentées sont très variées.

Exercice 9. Soit S un sous-ensemble de $\{1, \ldots, 100\}$ possédant 16 éléments. Montrer qu'il existe quatre éléments distincts $a, b, c, d \in S$ tels que $a + b = c + d$.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> Ici, l'idée est de voir qu'il y a suffisamment de paires pour que deux distinctes aient une même somme. Malheureusement, il n'y a que $\binom{16}{2} = 120$ paires distinctes, pour des sommes allant de 3 à 199, c'est-à-dire 197 sommes distinctes. On ne peut donc pas directement utiliser le principe des tiroirs pour conclure.

L'idée est alors de considérer la différence en valeur absolue des nombres d'une paire plutôt que leur somme. De cette façon, il y a 99 valeurs possibles de telles différences (les entiers de 1 à 99) pour 120 paires. Le principe des tiroirs fournit l'existence d'au moins deux paires $(a, b), (c, d)$, avec $a > b, c > d$ telles que $a - b = c - d$, i.e. $a + d = b + c$. Puisque les paires sont différentes, on a $a \neq c$ (sinon $d = b$ et par suite $\{a, b\} = \{c, d\}$) et de même $b \neq d$ mais par contre on peut très bien avoir $b = c$ (ou $a = d$).

Pour $s \in S$, on dit que s est mauvais s'il existe $b < s < c$ des nombres de S tels que $2s = b + c$. On peut supposer que pour un s donné, de tels b et c sont uniques car l'un détermine l'autre et si b', c' est un autre couple, alors $b' + c' = b + c$ (et le problème est résolu).

Pour $s \in S$ mauvais, soit $b(s) \in S$ l'unique nombre tel qu'il existe $c \in S$ avec $c < s$ et $c + b(s) = 2s$. Enlevons les ℓ paires $\{s, b(s)\}$ de toutes les paires formées d'éléments de S (où $\ell \leqslant |S| = 16$ est le nombre d'éléments de S qui sont mauvais). On a ainsi $120 - \ell \geqslant 104 > 99$ paires dont on peut considérer les différences : par le principe des tiroirs, deux de ces paires donnent la même différence. Par construction, il est clair que ces deux paires ne partagent pas un élément en commun : on a donc quatre entiers distincts $a, b, c, d \in S$ tels que $a - b = c - d$ soit $a + d = b + c$, ce qui conclut.

<u>*Commentaire des correcteurs :*</u> L'exercice est très bien réussi par les quelques copies qui l'abordent.

Exercices Seniors

Exercice 10. Soient a et b des entiers positifs impairs tels que $a^b b^a$ est un carré parfait. Montrer que ab est un carré parfait.

Solution de l'exercice 10 Une manière de résoudre cet exercice est de se rappeler qu'un nombre entier est un carré parfait si et seulement si sa valuation $p-$adique est paire pour tout nombre premier p. Or

$$\begin{aligned} v_p(a^b b^a) &= a v_p(b) + b v_p(a) \\ &\equiv v_p(a) + v_p(b) \pmod 2 \quad \text{car } a \text{ et } b \text{ sont impairs} \\ &= v_p(ab) \pmod 2. \end{aligned}$$

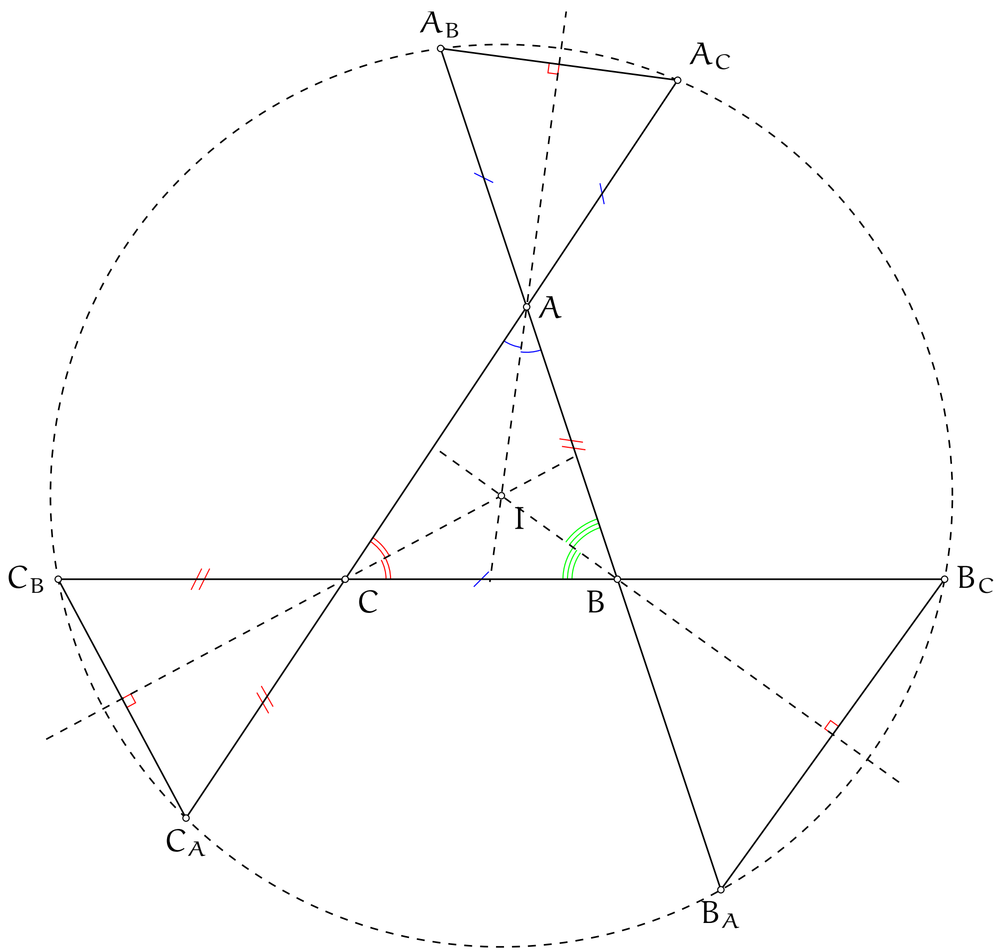
Dès lors, si $a^b b^a$ est un carré parfait, il en est de même de ab.

Sinon, on peut écrire a et b sous la forme $a = 2x + 1$ et $b = 2y + 1$, avec x et y des entiers. Si $a^b b^a$ est un carré parfait, on peut écrire $a^b b^a = c^2$ avec c entier. On remarque alors que $c^2 = (a^y b^x)^2 ab$, ce qui prouve que ab est nécessairement le carré d'un entier.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est bien compris dans l'ensemble.

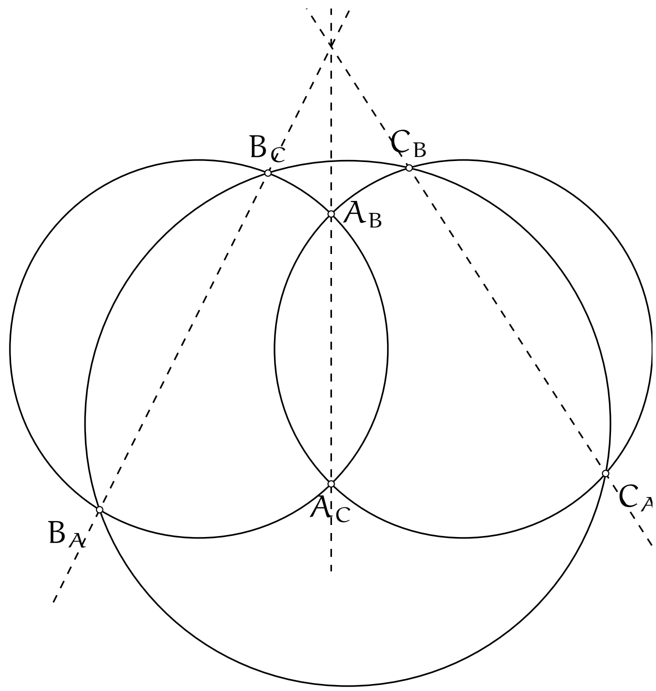
Exercice 11. Soit ABC un triangle. Sur les droites (AB) et (AC), on construit respectivement des points A_B et A_C de telle sorte que A soit dans les segments $[BA_B]$ et $[CA_C]$ et que $AA_B = AA_C = BC$. On définit de même les points B_A, B_C et C_A, C_B du côté de B et C respectivement. Montrer que les points A_B, A_C, B_A, B_C, C_A et C_B sont sur un même cercle.

Solution de l'exercice 11



On commence par tracer une figure exacte contenant de façon visuelle les égalités de longueur de l'énoncé.
Il en ressort que le triangle AA_BA_C est isocèle en A. La médiatrice du segment $[A_BA_C]$ est donc la bissectrice de l'angle $\widehat{A_BAA_C}$, qui est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. On obtient de même que la médiatrice du segment $[B_AB_C]$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ et que la médiatrice du segment $[C_AC_B]$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{BCA}$. Les médiatrices des trois segments se coupent donc au point I, le centre du cercle inscrit du triangle ABC.
Il nous reste à montrer que ces points sont tous équidistants du point I. Pour ce faire, on remarque que le triangle A_BBC_B est isocèle en B puisque $A_BB = AB+BC = BB_C$. La médiatrice du segment $[A_BC_B]$ est donc la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ et passe donc par le point I. Dès lors, on a $C_AI = C_BI = A_BI = A_CI$ et les quatre points A_B, A_C, C_A et C_B sont équidistants du point I. On obtient de même que les six points A_B, A_C, B_A, B_C, C_A et C_B sont équidistants du point I et donc sur un même cercle.

Commentaire des correcteurs : De nombreux élèves ont commis l'erreur suivante : après avoir montré que les quadrilatères $A_BA_CB_AB_C$, $B_CB_AC_AC_B$ et $C_AC_BA_CA_B$ sont cycliques, il déduisent immédiatement que les six points A_B, A_C, B_A, B_C, C_A et C_B sont cocycliques. Pourtant les informations ne données ne sont pas suffisantes. Par exemple, les points pourraient se retrouver dans la configuration suivante :



Il est ESSENTIEL de vérifier que toutes les affirmations faites sont effectivement vraies et de ne pas essayer de coup de bluff (car ceux-ci sont voués à l'échec).

Exercice 12. Soient a, b, c des entiers strictement positifs tels que $\frac{a^2-a-c}{b}+\frac{b^2-b-c}{a}=a+b+2$. Montrer que $a+b+c$ est un carré parfait.

Solution de l'exercice 12 On commence par faire apparaître la quantité $a+b+c$ dans l'équation. Pour cela, on soustraie 2 aux deux côtés de l'équation, en utilisant que $2=\dfrac{a}{a}+\dfrac{b}{b}$ et on obtient

$$\frac{a^2-(a+b+c)}{b}+\frac{b^2-(a+b+c)}{a}=a+b$$

On supprime ensuite les dénominateurs et on trouve

$$a^3+b^3=(a+b)(a+b+c)+ab(a+b)$$

En factorisant $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ et en simplifiant des deux côtés par $a+b$ qui est strictement positif, on trouve

$$a^2-ab+b^2=a+b+c+ab$$

si bien que

$$a+b+c=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

est un carré parfait.

Commentaire des correcteurs : Tous les élèves ont effectué la manipulation algébrique avec succès.

Exercice 13. Soit n un entier strictement positif. Trouver le plus grand entier k, dépendant de n, tel qu'il existe un sous-ensemble S de $\{1, \ldots, 2n-1\}$ possédant k éléments et tel que si a, b et c sont trois éléments de S pour lesquels $a+b=c$, l'égalité $a=b$ est nécessairement satisfaite.

Solution de l'exercice 13 L'exercice nous demande de trouver le plus grand entier satisfaisant une certaine propriété, il comporte inévitablement deux parties : l'analyse (si un entier k vérifie la propriété, alors $k \leqslant c$ avec c l'entier à déterminer) et la construction (un exemple explicite d'un ensemble A comprenant c éléments).

Afin de deviner la réponse et pour comprendre un peu mieux le problème, on peut commencer par examiner l'énoncé pour des petites valeurs de n.
On peut par exemple remarquer que l'ensemble $A = \{1, 3, \ldots, 2n-1\}$ des entiers positifs impairs inférieurs ou égaux à $2n-1$ vérifie la propriété de l'énoncé puisque la somme de deux nombres impairs est paire. Cet ensemble contient n éléments.
De même, l'ensemble $B = \{n, n+1, \ldots, 2n-1\}$ des entiers compris entre n et $2n-1$ vérifie également la propriété puisque la somme de deux éléments est supérieure ou égale à $2n$. Cet ensemble comporte aussi n éléments.
On a construit deux ensembles à n éléments, on peut conjecturer que n est le plus grand entier satisfaisant la propriété.

Soit S un sous-ensemble de $\{1, \ldots, 2n-1\}$ tel que pour tout triplet d'éléments (a, b, c) de S, si $a+b=c$ alors $a=b$. Notons $k=|S|$ son cardinal et $a_1 < \ldots < a_k$ ses éléments. Par hypothèse, parmi les nombres $a_k - a_i$ avec $1 \leqslant i \leqslant k-1$, au plus un seul appartient à S. En effet, le nombre $a_k - a_i$ appartient à l'ensemble S seulement si $a_k = 2a_i$, et cette égalité est satisfaite par au plus un élément de S. L'ensemble $S' = \{a_k - a_i, 1 \leqslant i \leqslant k-1\}$ est de taille $k-1$, inclus dans $\{1, \ldots, 2n-1\}$ et vérifie donc

$$2n-1 \geqslant |S \cup S'| = |S| + |S'| - |S \cap S'| \geqslant k + k - 1 - 1 = 2(k-1)$$

On a obtenu que $2(k-1) \leqslant 2n-1$. En considérant la parité des deux nombres on obtient même que $2(k-1) \leqslant 2(n-1)$ et donc que $k \leqslant n$, comme conjecturé.

Le plus grand entier recherché est donc l'entier n.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est bien résolu !

Exercice 14. Soit p un nombre premier et $a_k \cdots a_0$ son écriture en base 10. On pose

$$Q_p(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Montrer que Q_p n'a pas de racines entières, sauf pour 4 valeurs de p que l'on déterminera.

Solution de l'exercice 14 Supposons que Q_p ait une racine entière. Les coefficients $a_0, \ldots, a_k$ étant positifs, on a $Q_p(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Ainsi, toute racine entière de Q_p est négative ou nulle. Notons $-\alpha$ cette racine, avec $\alpha \geqslant 0$. Par définition, on peut écrire

$$Q_p(x) = (x + \alpha) R(x),$$

avec R un polynôme à coefficients entiers.

En évaluant cette relation en $x = 10$, il vient $Q_p(10) = (\alpha + 10) R(10)$. Or $Q_p(10) = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + 10 a_1 + a_0 = p$. Comme $R(10)$ est entier, on en déduit que $\alpha + 10$ divise p, et donc que $\alpha + 10 = p$ car p est premier ($\alpha + 10 \neq 1$ car $\alpha \geqslant 0$).

Ainsi, $\alpha = 10 - p$ et $Q_p(10 - p) = 0$. En particulier, on a $Q_p(10 - p) \equiv a_0 \equiv 0 \pmod{10 - p}$, d'où $10 - p$ divise a_0. Puisque $0 \leqslant a_0 \leqslant 9$, on en conclut que p vaut nécessairement $11, 13, 17$ ou 19.
Réciproquement, si $p = 11, 13, 17$ ou 19, Q_p est linéaire à coefficient constant entier et admet donc bien une racine entière.
Solution n°2 :
Prenons de même un Q_p qui convient et α une racine entière qui est donc négative.
En évaluant Q_p en α on a alors $Q_p(\alpha) = 0$ soit $\alpha(a_k \alpha^{k-1} \cdots + a_2 \alpha + a_1) = -a_0$.
On en déduit que α divise a_0. Notons que p doit posséder au moins deux chiffres, sans quoi Q_p serait constant non nul. On en déduit que $a_0 \in \{1, 3, 7, 9\}$ et donc $-\alpha \in \{1, 3, 7, 9\}$.

D'autre part, puisque Q_p est à coefficients entiers, on sait que pour tous entiers a et b, $b - a$ divise $Q_p(b) - Q_p(a)$. On en déduit que $10 - \alpha$ divise $Q_p(10) - Q_p(\alpha) = p - 0 = p$. Ainsi, $10 - \alpha$ divise p. Puisque $10 - \alpha \in \{11, 13, 17, 19\}$ et que $10 - \alpha \in \{1, p\}$, on déduit que $p = 11$, 13, 17 ou 19. Réciproquement, ces valeurs conviennent bien.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est bien compris par les élèves et de nombreuses façons permettaient d'aboutir au résultat même si les résultats intermédiaires étaient essentiellement les mêmes. Attention à bien expliquer très rapidement que les solutions proposées fonctionnent bien.

Exercice 15. Prouver que pour tout nombre premier $p \geqslant 5$ et tous nombres entiers $a, b \geqslant 1$, on a $\binom{pb}{pa} \equiv \binom{b}{a} \pmod{p^3}$.

<u>*Solution de l'exercice 15*</u> L'idée de la solution est d'écrire que $\binom{pb}{pa} = \frac{pb}{pa} \times \binom{pb-1}{pa-1}$, puis que $\binom{pb-1}{pa-1} = \frac{pb-1}{pa-1} \times \binom{pb-2}{pa-2}$ et ainsi de suite de sorte que

$$\binom{pb}{pa} = \prod_{k=0}^{p-1} \frac{pb-k}{pa-k} \times \binom{p(b-1)}{p(a-1)}$$

Dès lors, si $\binom{p(b-1)}{p(a-1)} \equiv \binom{b-1}{a-1} \pmod{p^3}$, en notant $T_p(X) = \prod_{k=1}^{p-1}(pX - k)$, on a

$$\binom{pb}{pa} = \frac{b}{a} \times \frac{T_p(b)}{T_p(a)} \times \binom{p(b-1)}{p(a-1)} \equiv \frac{T_p(b)}{T_p(a)} \times \frac{b}{a}\binom{b-1}{a-1} = \frac{T_p(a)}{T_p(b)} \times \binom{b}{a} \pmod{p^3}$$

Travaillons donc par récurrence sur a. Puisque le résultat est clair pour $a = 0$, il suffit de montrer que $T_p(n)$ est un entier premier à p dont le reste modulo p^3 ne dépend pas de n, c'est-à-dire que T_p est constant modulo p^3 et premier à p. Or

$$T_p(n) \equiv (p-1)! - pn \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{k} + p^2 n^2 \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant p-1} \frac{(p-1)!}{kl} \pmod{p^3}$$

Il suffit donc de montrer que les entiers $a_1 = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{k}$ et $a_2 = \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant p-1} \frac{(p-1)!}{kl}$ sont respectivement divisibles par p^2 et p.

Si on considère le polynôme $R_p(X) = T_p(X/p) \in \mathbb{Z}[X]$, son coefficient en X est a_1 et son coefficient en X^2 est a_2. De plus, par le petit théorème de Fermat, R_p vu comme polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est égal à $X^{p-1} - 1$ car ils ont même degré, même coefficient dominant, et que les racines de R_p, qui sont simples, sont des racines de $X^{p-1} - 1$. Par conséquent, a_1 et a_2 sont nuls modulo p, i.e. $p \mid a_1$ et $p \mid a_2$.

Pour prouver que $p^2 \mid a_1$, on remarque qu'on a déjà montré $T_p(n) \equiv (p-1)! - pna_1 \pmod{p^3}$ et qu'il suffit de montrer que $T_p(n) \equiv (p-1)! \pmod{p^3}$ pour une seule valeur de n première à p. Or $T_p(1) = (p-1)!$ par définition de T_p, d'où le résultat.

<u>*Commentaire des correcteurs :*</u> L'exercice est plutôt bien réussi, et les solutions sont très variées.

Exercice 16. On considère un collier circulaire avec 2021 perles. Chaque perle peut être coloriée en blanc ou en vert. Un coloriage du collier est dit *chic* si, parmi 21 perles consécutives, il y a toujours au moins une perle verte. Montrer que le nombre de coloriages chics du collier est impair.

Solution de l'exercice 16 Considérons un problème légèrement différent, qui consiste à calculer, pour un entier N donné, la parité du nombre de lignes de N perles où chaque perle est soit blanche, soit verte, et tel que sur 21 perles consécutives il y en ait toujours une verte. Notons a_N ce nombre modulo 2. On a donc un problème où on a une ligne, alors qu'auparavant on avait un collier. Comme nous le verrons plus tard, calculer a_N pour tout entier N est assez facile, car la ligne est adaptée à un raisonnement par récurrence. Voyons désormais comment résoudre à partir de la connaissance des a_N le problème initial.

Numérotons nos perles sur notre collier à 2021 perles. L'objectif est de "casser le collier" pour nous ramener à une ligne. Pour un coloriage c chic donné, soit k le numéro de la première perle après (au sens large) la perle 1 qui est verte et ℓ le numéro de la première perle avant (au sens strict) la perle 1 qui est verte. Comme c est chic, on a $1 \leqslant k \leqslant 21$, et $2001 \leqslant \ell \leqslant 2021$. De plus, il y a au plus 20 perles blanches entre la perle ℓ et la perle k, donc $2021 - \ell + k \leqslant 21$, d'où $\ell \geqslant 2000 + k$. Réciproquement, ces trois conditions sur ℓ et k étant données, pour que le collier c soit chic, il suffit que la ligne de perles $k+1, k+2, \ldots, \ell-1$ soit chic. Dès lors, la parité du nombre de colliers chics est

$$P = \sum_{1 \leqslant k \leqslant 21} \sum_{2000+k \leqslant \ell \leqslant 2021} a_{\ell-k-1}$$

Pour calculer a_N, on remarque que $a_0 = 1$ et $a_i = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant 20$. De plus, on a la formule de récurrence $a_{i+21} = \sum_{j=0}^{20} a_{i+j}$ car si on appelle $i+j+1$ le numéro de la dernière perle verte sur une ligne chic de taille $i+21$, alors $0 \leqslant j \leqslant 20$ et il reste à choisir une ligne chic de taille $i+j$. Cette formule de récurrence permet de montrer immédiatement que $a_N = 1$ si et seulement si $N \equiv 0$ ou $-1 \pmod{22}$.

Finalement, on calcule (modulo 2 toujours)

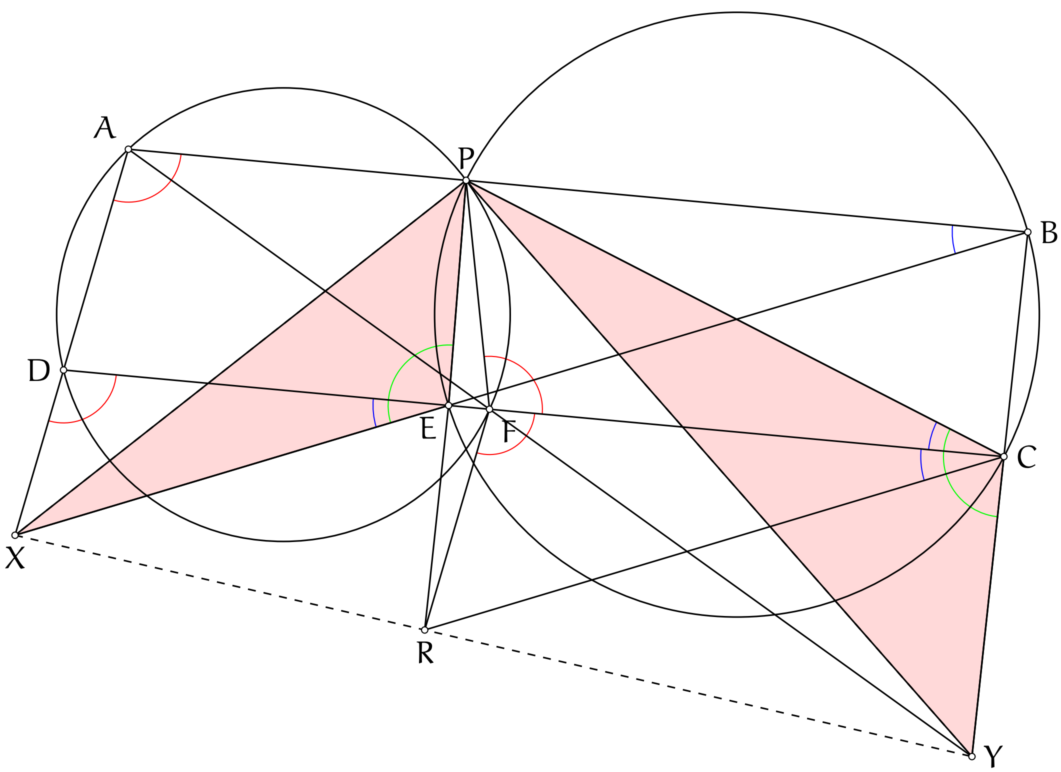
$$P = \sum_{k=1}^{21} \sum_{N=1999}^{2020-k} a_N = a_{1999} + a_{2001} + \ldots + a_{2019} = 1$$

car $2001 \equiv -1 \pmod{22}$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été abordé par très peu d'élèves et n'a pas été résolu.

Exercice 17. Deux cercles ω_1 et ω_2 se coupent en P et Q. Une droite arbitraire passant par P recoupe ω_1 en A et ω_2 en B. Une droite parallèle à (AB) coupe ω_1 en D, F et ω_2 en E, C de sorte que E et F se trouvent entre C et D. Soit X le point d'intersection des droites (AD) et (BE), Y celui des droites (BC) et (AF). Soit R le symétrique de P par rapport à (CD). Montrer que (PR) est la bissectrice de $\widehat{XPY}$.

<u>*Solution de l'exercice 17*</u>



En traçant la figure, on se rend compte que le point R semble appartenir au segment [XY]. On s'empresse donc de démontrer ce résultat.
Pour cela, on commence par effectuer une chasse aux angles en utilisant les hypothèses de l'énoncé. Par exemple, les droites (DE) et (AB) sont parallèles et les points P, B, C et E sont cocycliques, donc $\widehat{DEX} = \widehat{PBE} = \widehat{PCE}$. D'autre part, puisque les points A, P, F et D sont cocycliques, $\widehat{XDE} = \widehat{DAP} = \widehat{PFC}$. Les triangles XDE et PFC sont donc semblables. Puisque le point R est le symétrique du point P par rapport à la droite (CF), les triangles PFC et RFC sont isométriques et les triangles XDE et RFC sont semblables. On a donc la classe suivante de triangles semblables :

$$\Delta XDE \simeq \Delta XAB \simeq \Delta PFC \simeq \Delta RFC$$

De la même façon, on obtient que

$$\Delta YCF \simeq \Delta YBA \simeq \Delta PED \simeq \Delta RED$$

On a donc

$$\frac{FR}{FY} = \frac{FR}{FC} \cdot \frac{FC}{FY} = \frac{AX}{AB} \cdot \frac{AB}{AY}$$

ce qui prouve que les triangles XAY et RFY sont semblables et donc que les points Y, R et X sont alignés.

Les égalités de rapport obtenues à partir des triangles semblables trouvés donnent également :

$$\frac{EP}{CY} = \frac{DE}{CF} = \frac{XE}{CP}$$

et comme $\widehat{XEP} = 180° - \widehat{PEB} = 180° - \widehat{PCB} = \widehat{PCY}$, les triangles XEP et YCP sont semblables.
Notons enfin que puisque

$$\frac{RC}{XB} = \frac{FC}{AB} = \frac{YC}{YB}$$

les droites (RC) et (XB) sont parallèles, si bien que le quadrilatère $EBCR$ est un parallélogramme. En particulier, $EB = RC$.
Pour conclure que la droite (PR) est la bissectrice de l'angle $\widehat{XPY}$, on peut utiliser les égalités de rapport précédents pour utiliser le théorème de la bissectrice. Ici :

$$\frac{PY}{PX} = \frac{PC}{XE} = \frac{RC}{XE} = \frac{EB}{XE} = \frac{YR}{XR}$$

où la dernière égalité utilise le théorème de Thalès pour les droites (ER) et (YB). D'après le théorème de la bissectrice, la droite (PR) est donc la bissectrice de l'angle $\widehat{XPY}$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été résolu par un seul élève. Une bonne figure était essentielle pour conjecturer que le point R appartenait à la droite (XY). Les élèves l'ayant remarqué ont été valorisés.

Exercice 18. Soient p et q des nombres premiers, avec $p < q$. On suppose qu'il existe un polygone convexe $P_1P_2 \cdots P_{pq}$ dont tous les angles sont égaux et dont les longueurs des côtés sont des entiers distincts. Montrer que, pour tout entier $k \leqslant p$, on a

$$P_1P_2 + P_2P_3 + \cdots + P_kP_{k+1} \geqslant \frac{k^3+k}{2}.$$

Solution de l'exercice 18 Le fait que tous les angles du polygone soient égaux nous invite à utiliser les nombres complexes. Plaçons le polygone dans le plan complexe en l'orientant dans le sens trigonométrique. Notons P_i l'affixe du i-ème point et $a_i = |P_{i+2} - P_{i+1}|$ la longueur du i-ième côté. Par hypothèse, les a_i sont des entiers. De plus, tous les angles du polygone sont égaux donc $P_{i+1} - P_i = a_{i-1}\omega^{i-1}$, avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{pq}}$.

On introduit le polynôme à coefficients entiers

$$f(x) = a_{pq-1}x^{pq-1} + \cdots + a_1x + a_0.$$

D'après l'hypothèse angulaire, $f(\omega) = 0$.

Le polynôme f est divisible par le polynôme minimal de ω sur $\mathbb{Q}[x]$, à savoir le polynôme cyclotomique $\Phi_{pq}(x) = \frac{(x^{pq}-1)(x-1)}{(x^p-1)(x^q-1)}$. Puisque p et q sont premiers, $\Phi_{pq}(x)$ est le plus grand diviseur commun entre $\Phi_q(x^p) = \frac{x^{pq}-1}{x^p-1}$ et $\Phi_p(x^q) = \frac{x^{pq}-1}{x^q-1}$. D'après le théorème de Bézout, il existe des polynômes à coefficients entiers u et v tels que $\deg u \leqslant p-1$, $\deg v \leqslant q-1$ et

$$f(x) = \frac{x^{pq}-1}{x^p-1}u(x) + \frac{x^{pq}-1}{x^q-1}v(x).$$

Notons $u(x) = u_{p-1}x^{p-1} + \cdots + u_1x + u_0$ et $v(x) = v_{q-1}x^{q-1} + \cdots + v_1x + v_0$. On remarque alors qu'on peut relier les coefficients de f à ceux de u et v. En effet, $\frac{x^{pq}-1}{x^p-1} = 1 + x^p + \cdots + x^{p(q-1)}$ donc $a_{mp+n} = u_n$ pour tout entier $0 \leqslant m \leqslant q-1$ et $0 \leqslant n \leqslant p-1$. De même, $a_{m'q+n'} = v_{n'}$ pour tout entier $0 \leqslant m' \leqslant p-1$ et $0 \leqslant n' \leqslant q-1$. Ainsi, si l'on note (i,j) l'unique entier $0 \leqslant n \leqslant pq-1$ tel que $n \equiv i \pmod p$ et $n \equiv j \pmod q$, on a $a_{(i,j)} = u_i + v_j$.

Finalement, pour tout entier $k \leqslant p$, on peut écrire

$$P_1P_2 + P_2P_3 + \cdots + P_kP_{k+1} = \sum_{i=0}^{k-1} a_{(i,i)} = \sum_{i=0}^{k-1} u_i + v_i = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1}(u_i + v_j) = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1} a_{(i,j)}.$$

Comme tous les $a_{(i,j)}$ sont des entiers distincts, on en conclut que

$$P_1P_2 + P_2P_3 + \cdots + P_kP_{k+1} \geqslant \frac{1}{k}(1 + \cdots + k^2) = \frac{k^3+k}{2}.$$

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été abordé par très peu d'élèves et n'a pas été trouvé.