Comment manier une hypothèse d'angles ?

Martin Rakovsky

L'objectif du présent TD est de se concentrer sur des problèmes de géométrie au caractère repoussant : des problèmes dans lesquels certains points sont définis par des égalités d'angles. Pourquoi cela est repoussant ? Parce que bien souvent il n'est pas évident de tracer directement une figure exacte. Super, on peut donc se débarasser de son compas et de son équerre et réfléchir complètement à main levée ? Rien n'est moins sûr ! Bien souvent dans ce genre de problème, c'est au contraire en cherchant comment tracer la figure exacte que l'on progresse dans sa résolution. En effet, pour tracer la figure, on est amené à chercher diverses propriétés sur les points présentés, à rajouter soi-même des objets géométriques, à effectuer des transformation, à reconnaître des configurations classiques... Vous l'aurez compris, le travail de recherche pour une construction exacte est déjà un travail de résolution de l'exercice.

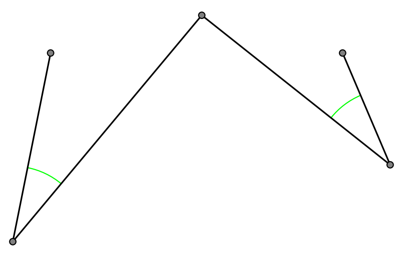
Il est à penser, au vu des IMO des années précédentes, que de tels problèmes vont apparaître de plus en plus souvent, une raison de plus de traiter ce genre de problèmes en particulier.

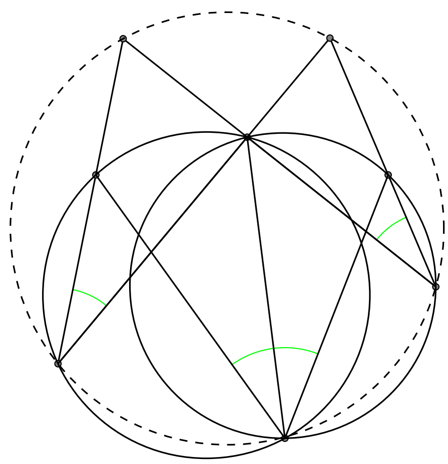
En gage de ma bonne foi, toutes les figures du présent corrigé ont été tracées de façon exacte.

1 Quelques conseils

Pour traiter les problèmes dans lesquels certains points sont définis par des égalités d'angles, voici quelques conseils :

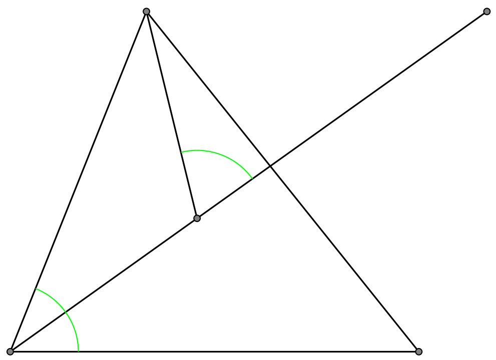
- Chercher comment tracer la figure exacte. Bien souvent, les idées déployées pour tracer la figure exacte sont également utiles pour la résolution de l'exercice. On va par exemple naturellement introduire des points intermédiaires, des cercles supplémentaires, des droites nouvelles et ces objets révèlent souvent les informations qui étaient cachées derrière la condition d'angles.
- Manipuler algébriquement l'hypothèse donnée. En rajoutant une quantité de chaque côté de l'équation, en soustrayant l'équation à 180°...l'objectif est de transformer l'hypothèse d'angle donnée en une hypothèse géométrique.
- **Introduire des points intermédiaires.** Voyons deux exemples.
  Supposons tout d'abord qu'on se trouve dans la situation de gauche :

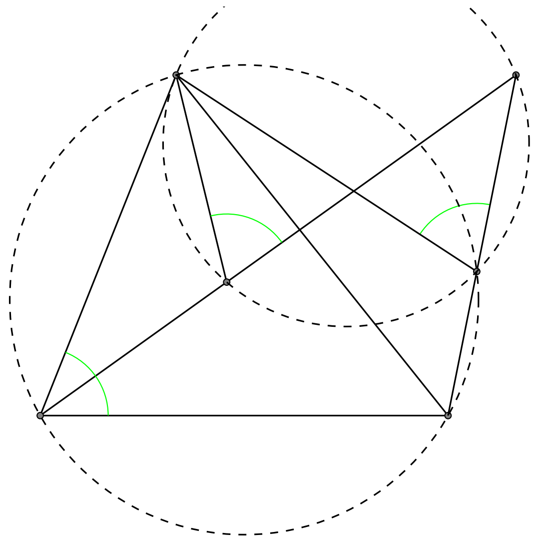




Deux angles de même mesure concernent deux segments disjoints. On peut compléter la figure pour avoir un cercle dont un arc est couvert par les deux angles (cercle en pointillé de la figure de droite) ou on peut chercher à introduire un point intermédiaire qui transporte l'information d'un angle à l'autre. Un point intermédiaire est par exemple le second point d'intersection des deux cercles portant les deux angles verts (cercles noirs de la figure de droite. L'introduction d'un tel point peut également permettre, dans certains cas, de construire la figure.

Regardons à présent la situation suivante





On désire construire, étant donné un triangle et une droite issue de l'un des sommets, un point sur la droite définissant un angle de même mesure que l'un des angles du triangle (voir situation de gauche). Un point intermédiaire intéressant est, encore une fois, le second point d'intersection des deux cercles circonscrits portant les deux arcs. Ici, en construisant d'abord le point d'intermédiaire, on peut construire de façon exacte le point désiré sur la droite : en traçant le cercle circonscrit au triangle puis en traçant le cercle passant par le point intermédiaire et les deux points ayant l'ordonnée la plus grande (voir les cercles en pointillé sur la figure de droite).

L'introduction de points intermédiaire est souvent bénéfique, et **un bon point intermédiaire est souvent un point appartenant à plusieurs cercles différents**, car il "transporte" d'une certaine manière les diverses égalités d'angles.
En présence d'une hypothèse d'égalité de deux angles, un point intermédiaire intéressant est le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles dont l'un des angles est concerné par l'hypothèse d'angle, comme cela a été montré dans les deux exemples précédents.

Penser point intermédiaire !

- Rechercher les configurations connues faisant intervenir des égalités d'angles (configuration de la symédiane par exemple). Quelques problèmes ne sont que des déguisements de certaines configuration par une redéfinition des divers points.
- L'inversion permet d'échanger des points et donc d'échanger des angles. Certaines hypothèses d'angles compliquées admettent une version analogue simple dans la figure inversée.

2 Exercice

Problème 1. (Russie 2013) Soit ABC un triangle et C_1 un point sur le segment $[AB]$. Soient A_1 et B_1 des points situés respectivement sur les segments $[BC]$ et $[CA]$ tels que $\widehat{AC_1B_1} = \widehat{BC_1A_1} = \widehat{ACB}$. Les droites (AA_1) et (BB_1) se coupent au point C_2. Soit C' le symétrique du point C par rapport au segment $[AB]$. Montrer que les points C', A, B et C_2 sont cocycliques. (L'énoncé original demande de montrer que la droite (C_1C_2) passe par un point fixe quand le point C_1 varie)

Problème 2. (Canada 2013) Soit ABC un triangle rectangle en C et G son centre de gravité. Soit P le point sur la demi-droite $[AG)$ tel que $\widehat{CPA} = \widehat{BAC}$. Soit Q le point sur la demi-droite $[BG)$ tel que $\widehat{CQB} = \widehat{CBA}$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangle AQG et BPG se coupent une deuxième fois en un point du segment $[AB]$.

Problème 3. (IMO 2014 P4) Soit ABC un triangle. Les points P et Q appartiennent au segment $[BC]$ de telle sorte que $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$ et $\widehat{CAQ} = \widehat{ABC}$. Les points M et N appartiennent respectivement aux droites (AP) et (AQ) de telle sorte que le point P soit le milieu du segment $[AM]$ et que le point Q soit le milieu du segment $[AN]$. Montrer que le point d'intersection des droites (BM) et (CN) appartient au cercle circonscrit du triangle ABC.

Problème 4. (IMO 2020 P1) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et soit P un point à l'intérieur du quadrilatère. On suppose que les égalités de rapports suivantes sont vérifiées :

$$\widehat{PAD} : \widehat{PBA} : \widehat{DPA} = 1 : 2 : 3 = \widehat{CBP} : \widehat{BAP} : \widehat{BPC}$$

Montrer que les trois droites suivantes sont concourrantes : la bissectrice de l'angle $\widehat{ADP}$, la bissectrice de l'angle $\widehat{PCB}$ et la médiatrice du segment $[AB]$.

Problème 5. (IMO 2006 P1) Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. Soit P un point un point à l'intérieur du triangle ABC vérifiant

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}$$

Montrer que $AP \geqslant AI$ avec égalité ssi $P = I$

Problème 6. (G2 2018) Soit ABC un triangle tel que $AB = AC$ et soit M le milieu du segment $[BC]$. Soit P un point vérifiant $PB < PC$ et tel que les droites (AP) et (BC) sont parallèles. Soient X et Y des points appartenant respectivement aux droites (PB) et (PC) de telle sorte que le point B est sur le segment $[PX]$, le point C est sur le segment $[PY]$ et $\widehat{PXM} = \widehat{PYM}$. Montrer que le quadrilatère $APXY$ est cyclique.

Problème 7. (USAMO 2021 P1) Soit ABC un triangle. On construit à l'extérieur du triangle ABC les rectangles BB_2C_1C, CC_2A_1A et AA_2B_1B. On suppose que

$$\widehat{BC_1C} + \widehat{CA_1A} + \widehat{AB_1B} = 180°$$

Montrer que les droites $(A_1B_2), (B_1C_2)$ et (C_1A_2) sont concourantes.

Problème 8. (BXMO 2012) Soit ABC un triangle et soit M le milieu du segment $[BC]$. Soit P un point à l'intérieur du triangle ABC vérifiant que $\widehat{CPM} = \widehat{PAB}$. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle PAB. Soit Q le second point d'intersection de la droite (PM) avec le cercle Γ. Soit R le symétrique du point P par rapport à la tangente au cercle Γ en B. Montrer que quand P varie, la distance QR reste constante.

Problème 9. (Pologne 2000) Soit ABC un triangle tel que $AC = BC$ et P un point à l'intérieur du triangle ABC vérifiant que $\widehat{PAB} = \widehat{PBC}$. Soit M le milieu du segment $[AB]$. Montrer que $\widehat{APM} + \widehat{BPC} = 180°$.

Problème 10. (IMO SL 2007 G3) Soit $ABCD$ un trapèze avec les côtés AD et BC parallèles et dont les diagonales se coupent au point P. Le point Q est compris entre les droites (AD) et (BC) de telle sorte que $\widehat{AQD} = \widehat{BQC}$ et de telle sorte que les points P et Q sont situés de part et d'autre de la droite (CD). Montrer que $\widehat{BQP} = \widehat{DAQ}$.

Problème 11. (IMO 2019 P2) Soit ABC un triangle et soient A_1 et B_1 deux points appartenant respectivement aux côtés $[BC]$ et $[CA]$. Soient P et Q deux points appartenant respectivement aux segments $[AA_1]$ et $[BB_1]$, de telle sorte que les droites (PQ) et (AB) soient parallèles. Soit P_1 un point situé sur la droite (PB_1) tel que B_1 se trouve situé entre les points P et P_1 et tel que $\widehat{PP_1C} = \widehat{BAC}$. Soit Q_1 un point situé sur la droite (QC_1) tel que C_1 se trouve situé entre les points Q et Q_1 et tel que $\widehat{QQ_1C} = \widehat{ABC}$. Montrer que les points P, Q, P_1 et Q_1 sont cocycliques.

Problème 12. (IMO SL 2016 G6) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe vérifiant $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} < 90°$. Les bissectrices intérieures des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ coupent respectivement le segment $[AC]$ en les points E et F et se coupent entre elles au point P. Soit M le milieu du segment $[AC]$. Soit ω le cercle circonscrit au triangle BPD. Les segments $[BM]$ et $[DM]$ coupent ω respectivement aux points X et Y. Soit Q le point d'intersection des droites (XE) et (YF). Montrer que les droites (PQ) et (AC) sont perpendiculaires.

Problème 13. (EGMO 2021 P3) Soit ABC un triangle dont l'angel en A est obtus. Soient E et F les points d'intersection respectifs de la bissectrice extérieur de l'angle $\widehat{BAC}$ avec les hauteurs issues des sommets B et C. Soit M un point du segment $[EC]$ tel que $\widehat{EMA} = \widehat{ACB}$. Soit N un point du segment $[FB]$ tel que $\widehat{ANF} = \widehat{ABC}$. Montrer que les points E, M, N et F sont cocycliques.

Problème 14. (IMO 2015 P3) Soit ABC un triangle tel que $AB > AC$ et soit Γ son cercle circonscrit. Soit H son orthocentre, M le milieu du segment $[BC]$ et F le pied de la hauteur issue du sommet A. Soit Q un point du cercle Γ tel que $\widehat{AQH} = 90°$. Soit K un point du cercle Γ tel que $\widehat{QKH} = 90°$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles KQH et KFM sont tangents entre eux.

Problème 15. (IMO 2014 P3) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90°$. Soit H le pied de la hauteur issue du sommet A dans le triangle ABD. Soient S et T appartiennent respectivement aux côtés AB et AD de telle sorte que

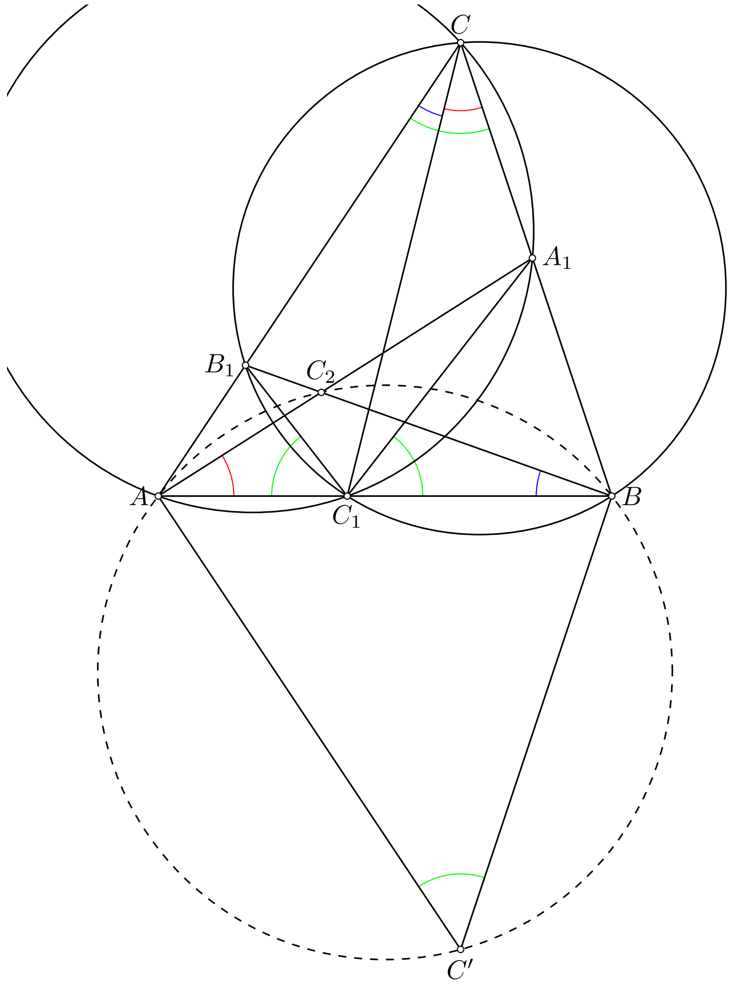
$$\widehat{SHC} - \widehat{BSC} = 90° \quad \text{et} \quad \widehat{THC} - \widehat{DTC} = 90°$$

Montrer que la droite (BD) est tangente au cercle circonscrit au triangle HST.

Problème 16. (IMO 2018 P6) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Soit X un point à l'intérieur du quadrilatère $ABCD$. On suppose que $\widehat{XAB} = \widehat{XCD}$ et $\widehat{XBC} = \widehat{XDA}$. Montrer que $\widehat{AXB} + \widehat{CXD} = 180°$.

3 Solutions

Problème 1. (Russie 2013) Soit ABC un triangle et C_1 un point sur le segment $[AB]$. Soient A_1 et B_1 des points situés respectivement sur les segments $[BC]$ et $[CA]$ tels que $\widehat{AC_1B_1} = \widehat{BC_1A_1} = \widehat{ACB}$. Les droites (AA_1) et (BB_1) se coupent au point C_2. Soit C' le symétrique du point C par rapport au segment $[AB]$. Montrer que les points C', A, B et C_2 sont cocycliques. (L'énoncé original demande de montrer que la droite (C_1C_2) passe par un point fixe quand le point C_1 varie)



Solution 1.

Les conditions d'angles données par l'énoncé nous donnent, d'après le théorème de l'angle inscrit, que les points A, C_1, A_1 et C sont cocycliques. Cela nous permet notamment de construire le point A_1. De même, on peut construire le point B_1 comme le point d'intersection du cercle (CC_1B) avec le côté $[AC]$.

En appliquant le théorème de l'angle inscrit dans ces cercles :

$$\widehat{C_2BC_1} = \widehat{B_1BC_1} = \widehat{B_1CC_1} = \widehat{ACC_1}$$

et de même

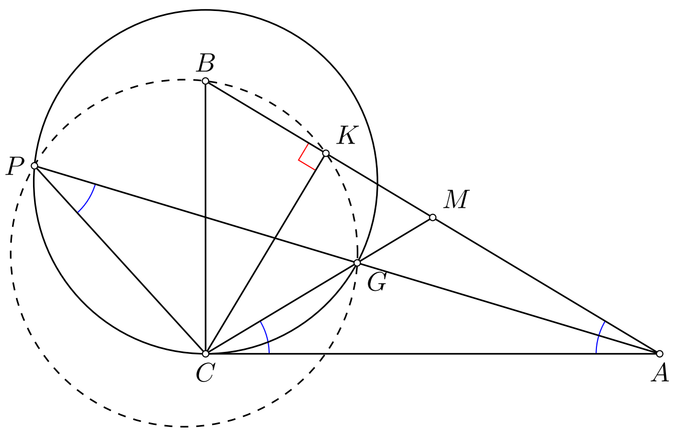
$$\widehat{C_2AB} = \widehat{C_1CB}$$

si bien que

$$\widehat{BAC_2} + \widehat{C_2BA} = \widehat{ACB} = \widehat{AC'B}$$

donc $\widehat{AC'B} = 180° - \widehat{AC_2B}$ donc les points annoncés sont bien cocycliques.

Problème 2. (Canada 2013) Soit ABC un triangle rectangle en C et G son centre de gravité. Soit P le point sur la demi-droite $[AG)$ tel que $\widehat{CPA} = \widehat{BAC}$. Soit Q le point sur la demi-droite $[BG)$ tel que $\widehat{CQB} = \widehat{CBA}$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangle AQG et BPG se coupent une deuxième fois en un point du segment $[AB]$.



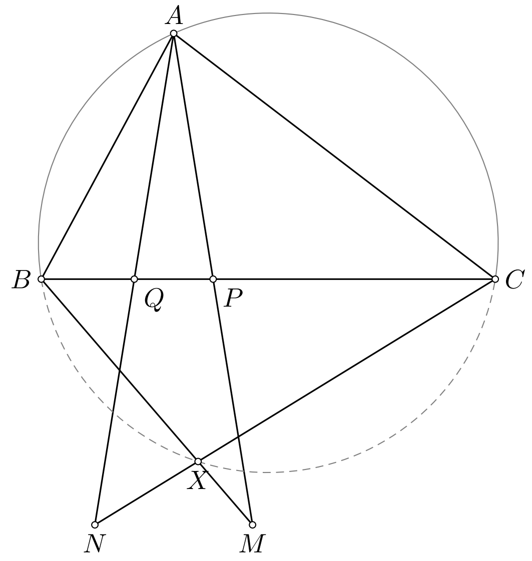
Solution 2.

Commençons par tracer la figure et tracer de façon exacte le point P. Pour cela, on cherche un angle plus commode qui vaut $\widehat{BAC}$ pour appliquer le théorème de l'angle inscrit. La médiane (CG) étant déjà présente sur la figure, on la prolong pour qu'elle coupe le segment $[AB]$ au poin M et comme le triangle ABC est rectangle en C, $\widehat{BAC} = \widehat{MCA}$. La droite (AC) est donc tangente au cercle circonscrit au triangle PCG. On peut tracer le cercle tangent à la droite (AC) passant par G, donc on peut tracer le point P.

Une fois la figure tracée, on peut conjecturer que le point K d'intersection des deux cercles est le pied de la hauteur issue du sommet C dans le triangle ABC. On note K le pied de la hauteur et on montre que K appartient au cercle circonscrit au triangle BPG.

Utilisons les informations que nous a apportées notre construction : d'après la puissance du point A par rapport au cercle (PCG), $AC^2 = AG \cdot AP$ et on sait que $AC^2 = AK \cdot AB$. On a donc $AB \cdot AK = AG \cdot AP$ et l'on peut conclure avec la réciproque de la puissance d'un point.

Problème 3. (IMO 2014 P4) Soit ABC un triangle. Les points P et Q appartiennent au segment $[BC]$ de telle sorte que $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$ et $\widehat{CAQ} = \widehat{ABC}$. Les points M et N appartiennent respectivement aux droites (AP) et (AQ) de telle sorte que le point P soit le milieu du segment $[AM]$ et que le point Q soit le milieu du segment $[AN]$. Montrer que le point d'intersection des droites (BM) et (CN) appartient au cercle circonscrit du triangle ABC.



Solution 3.

Ici, il s'agit de réinterpréter les égalités qui sont données. Puisque $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$, la droite (AB) est tangente au cercle circonscrit au triangle APC. Le centre du cercle ACP s'obtient comme le point d'intersection de la perpendiculaire à la droite (AB) passant par A et la médiatrice du segment $[AC]$. Si on peut tracer le cercle APC, on peut tracer le point P. De même on trace le point Q. On peut alors tracer le reste de la figure. On note X le point d'intersection des droites (BM) et (CN).

Les égalités d'angles nous apportent que les triangles ABC, PBA et QCA sont semblables. En particulier on déduit que

$$\frac{NQ}{QC} = \frac{AQ}{CQ} = \frac{AB}{AC} = \frac{BP}{AP} = \frac{BP}{PM}$$

et puisque $\widehat{BPM} = 180° - \widehat{BPA} = 180° - \widehat{BAC} = \widehat{NQC}$, les triangles BPM et NQC sont semblables. On a donc

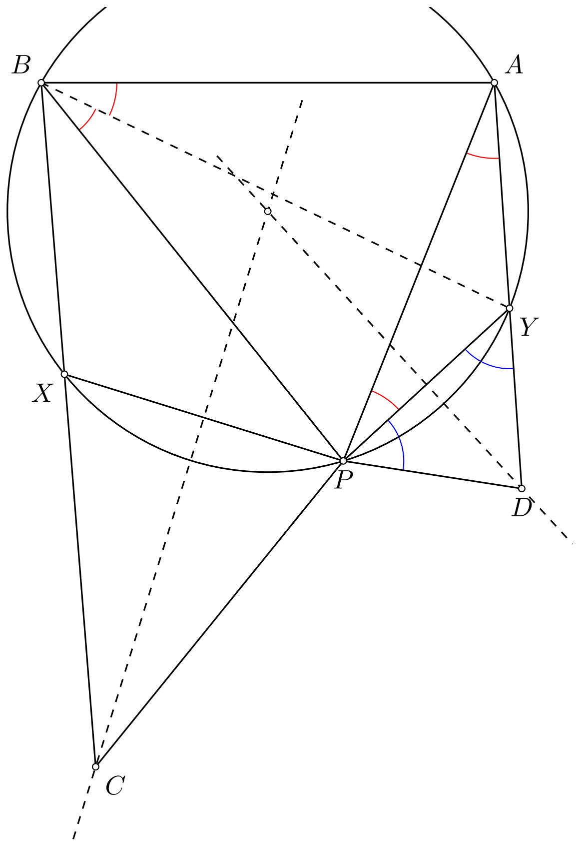
$$\widehat{XBC} + \widehat{XCB} = \widehat{MBP} + \widehat{NCQ} = \widehat{MBP} + \widehat{BMP} = \widehat{BPA} = \widehat{BAC}$$

donc $\widehat{BXC} = 180° - \widehat{BAC}$ et les points A, B, C et X sont cocycliques.

Problème 4. (IMO 2020 P1) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et soit P un point à l'intérieur du quadrilatère. On suppose que les égalités de rapports suivantes sont vérifiées :

$$\widehat{PAD} : \widehat{PBA} : \widehat{DPA} = 1 : 2 : 3 = \widehat{CBP} : \widehat{BAP} : \widehat{BPC}$$

Montrer que les trois droites suivantes sont concourrantes : la bissectrice de l'angle $\widehat{ADP}$, la bissectrice de l'angle $\widehat{PCB}$ et la médiatrice du segment $[AB]$.



Solution 4.

Résoudre l'exercice consiste à trouver comment tracer la figure.

Pour cela on prend le problème à l'envers en notant que l'angle $\widehat{PBA}$ détermine la position du point D. Ceci nous conduit à construire le triangle PBA puis construire les points C et D à partir de ce triangle. Pour construire le point D, il faut déterminer l'angle $\widehat{PBA} = 2\widehat{PAD}$. Ceci conduit à couper l'angle $\widehat{PBA}$ en deux et à tracer sa bissectrice.

Supposons le point D construit. Le point Y d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{PBA}$ avec la droite (AD) vérifie par hypothèse

$$\widehat{YAP} = \widehat{DAR} = \frac{1}{2}\widehat{PBA} = \widehat{YBA}$$

donc les points Y, A, B et P sont cocycliques. Le point Y est donc le pôle Sud du sommet B dans le triangle ABP. A l'inverse, le point D appartient donc à la droite (AY) avec Y le pôle Sud du sommet B dans le triangle PAB. On a alors

$$\widehat{DPY} = \widehat{DPA} - \widehat{YPA} = 3\widehat{PAD} - \widehat{PAD} = 2\widehat{PAD} = \widehat{PYD}$$

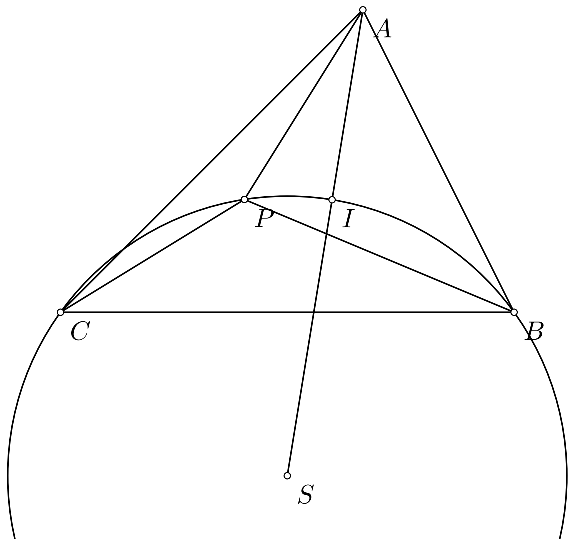
Le triangle PDY est donc isocèle en D. Le point D est donc le point d'intersection de la droite (AY) et de la médiatrice du segment $[PY]$. La bissectrice de l'angle $\widehat{PDA}$ est donc la médiatrice du segment $[PY]$.

De même la bissectrice de l'angle $\widehat{PCB}$ est la médiatrice du segment $[PX]$, où X est le pôle Sud du sommet A dans le triangle APB. Les bissectrices des angles $\widehat{PCB}$ et $\widehat{PDA}$ se coupent donc au point O le centre du cercle circonscrit au triangle APB. Celui-ci appartient bien à la médiatrice $[AB]$.

Problème 5. (IMO 2006 P1) Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. Soit P un point un point à l'intérieur du triangle ABC vérifiant

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}$$

Montrer que $AP \geqslant AI$ avec égalité ssi $P = I$



Solution 5.

Ici, il est bien sûr très difficile de placer le point P sur la figure, pourtant c'est en trouvant comment le placer que l'on va effectivement résoudre l'exercice. On commence par réfléchir à main levée.

Tout d'abord, le membre de droite de l'inégalité s'écrit $180° - \widehat{BPC}$. On calcule donc $180° - \widehat{PBA} - \widehat{PCA}$:

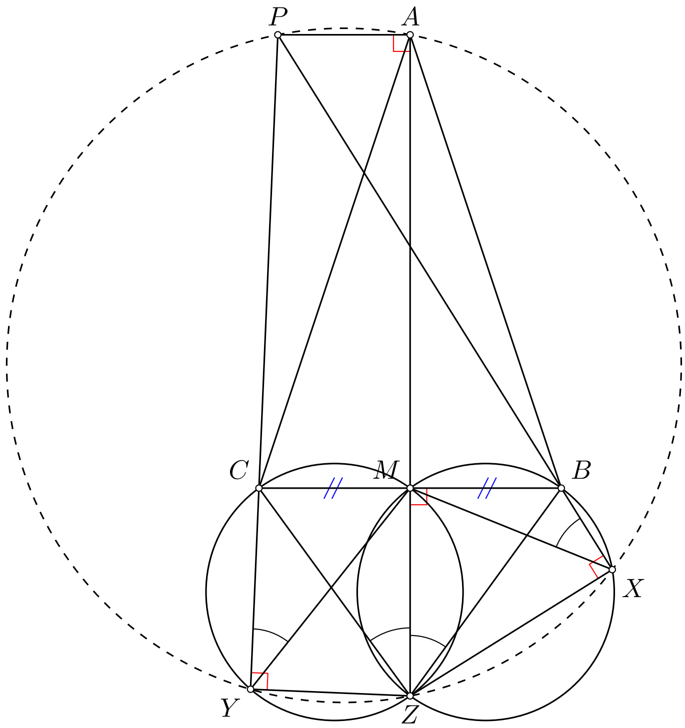
$$\begin{aligned} 180° - \widehat{PBA} - \widehat{PCA} &= \widehat{PAB} + \widehat{APB} - \widehat{PCA} \\ &= \widehat{PAB} + 360° - \widehat{BPC} - \widehat{CPA} - \widehat{PCA} \\ &= \widehat{PAB} + \widehat{PAC} + 180° - \widehat{BPC} \\ &= \widehat{BAC} + 180° - \widehat{BPC} \end{aligned}$$

si bien que $\widehat{BPC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} + 90°$.

Le point P est donc sur un cercle passant par les points B et C et un troisième point X fixe vérifiant $\widehat{BXC} = 90° + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$, encore faut-il trouver le point X. Il ne faut pas chercher bien loin, l'énoncé évoque le point I, il ne reste donc plus qu'à remarquer que $\widehat{BIC} = 90° + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

Le point P est donc sur le cercle antarctique, de centre le pôle Sud du sommet A. La distance du point A à ce cerlce est AI car A, I et le pôle Sud S sont alignés, donc $AP \geqslant AI$ avec égalité ssi $P = I$.

Problème 6. (G2 2018) Soit ABC un triangle tel que $AB = AC$ et soit M le milieu du segment $[BC]$. Soit P un point vérifiant $PB < PC$ et tel que les droites (AP) et (BC) sont parallèles. Soient X et Y des points appartenant respectivement aux droites (PB) et (PC) de telle sorte que le point B est sur le segment $[PX]$, le point C est sur le segment $[PY]$ et $\widehat{PXM} = \widehat{PYM}$. Montrer que le quadrilatère $APXY$ est cyclique.



Solution 6.

Le problème est le suivant : étant donné le point X placé sur la droite (PB), comment construire le point Y. Une première réponse serait de dire "étant donné l'énoncé, je n'ai qu'à tracer le cercle (APX) et prendre le point d'intersection de ce cercle avec la droite (PC)", mais cela ne nous apporterait pas beaucoup d'informations.

Penser point intermédiaire ! On va rajouter un point Z intermédiaire, qui vérifierait $\widehat{CZM} = \widehat{CYM}$ et $\widehat{MZB} = \widehat{MXB}$. On sait qu'

un point intermédiaire souvent utile est le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles dont l'un des angles est concerné par l'hypothèse d'angle.

Ici, on considère donc le point Z, second point d'intersection des cercles (MXB) et (MYC). On le note Z. Puisque $\widehat{MZB} = \widehat{MXB} = \widehat{MYC} = \widehat{MZC}$, la droite (MZ) est la médiane et la bissectrice issue du sommet Z dans le triangle BZC. Donc le point Z est sur la médiatrice du segment $[BC]$.

Pour construire la figure on procède donc comme suit : on choisit un point Z sur la médiatrice du segment $[BC]$, on choisit X comme le second point d'intersection du cercle (ZMB) et de la droite (PB) et on construit le point Y de la même façon.

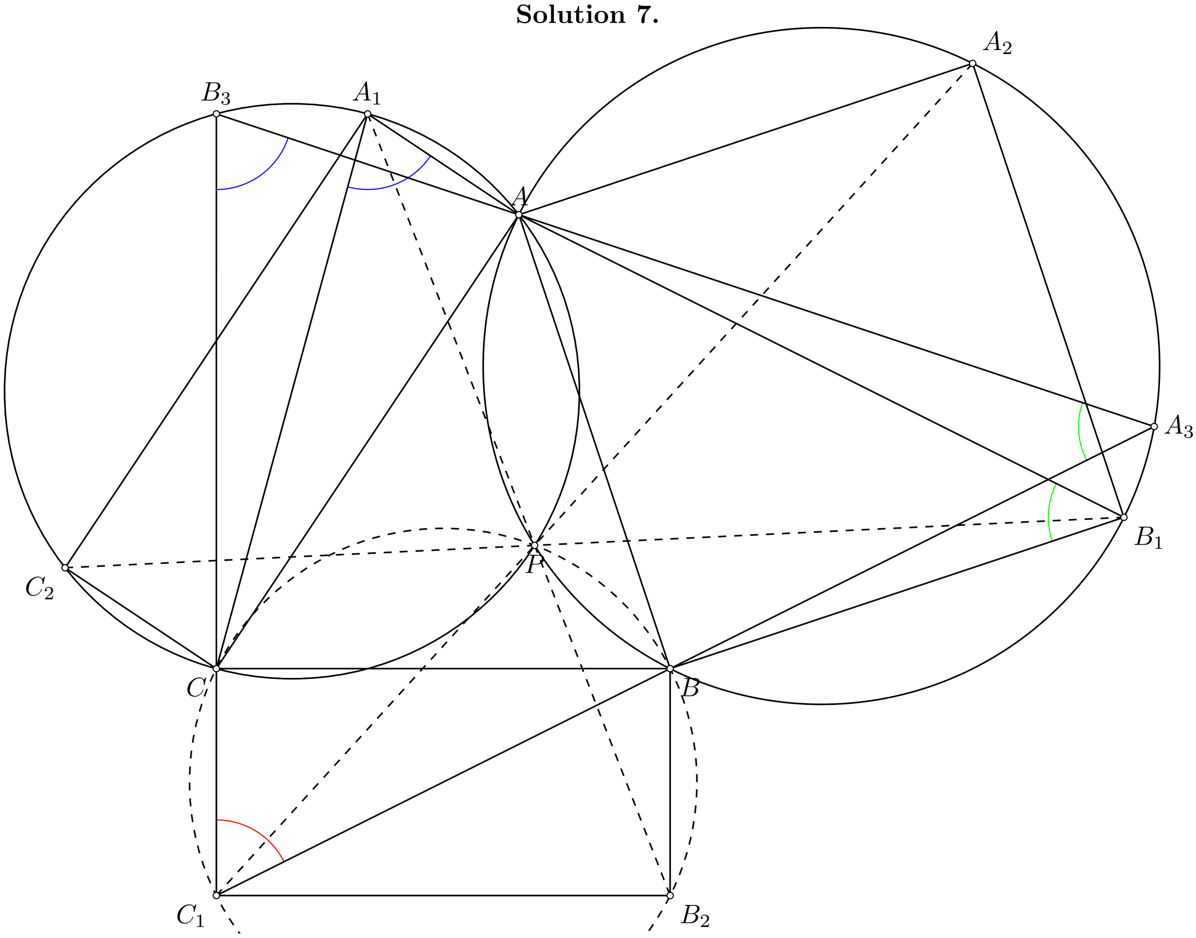
On peut imaginer que le point Z va nous servir dans la démonstration. Comme l'angle $\widehat{ZMB}$ est droit et que les points M, B, X et Z sont cocycliques, $\widehat{ZXB} = 90°$. De même, $\widehat{ZYC} = 90°$. les points A, X et Y sont donc suer le cercle de diamètre $[PZ]$ donc en particulier les points P, A, X, Z et Y sont cocycliques.

Problème 7. (USAMO 2021 P1) Soit ABC un triangle. On construit à l'extérieur du triangle ABC les rectangles BB_2C_1C, CC_2A_1A et AA_2B_1B. On suppose que

$$\widehat{BC_1C} + \widehat{CA_1A} + \widehat{AB_1B} = 180°$$

Montrer que les droites $(A_1B_2), (B_1C_2)$ et (C_1A_2) sont concourantes.

Solution 7.



Ici aussi, comprendre comment construire la figure permet de terminer rapidement l'exercice.

Le fait que la somme des angles vaut 180° nous fait penser à un triangle. On doit donc essayer de créer un triangle ayant les $\widehat{BC_1C}, \widehat{CA_1A}$ et $\widehat{AB_1B}$. Pourcela on part du rectangle CBB_2C_1 et du rectangle AA_1C_2, C. On souhaite construire un point B_3 sur la droite (C_1C) tel que $\widehat{CB_3A} = \widehat{CA_1A}$. Le théorème de l'angle inscrit est tout indiqué, on choisit B_3 comme le second point d'intersection de la droite (CC_1) et du cercle (AA_1C_2C). On Prolonge ensuite les droites (B_3A) et (BC_1) pour obtneir un point A_3 vérifiant $\widehat{AA_3B} = 180° - \widehat{BC_1C} - \widehat{CA_1A}$. Pour construire le point B_1, on utilise encore une fois le théorème de l'angle inscrit et le point B_1 est le point d'intersection du cercle (AA_3B) et de la perpendiculaire en B à la droite (AB). On peut alors construire A_2.

Lorsque l'on trace les trois droites qui doivent concourir, on s'aperçoit qu'elles se coupent sur le second point d'intersection des deux cercles (AA_1C_2C) et (AA_2B_1B). On note P ce second point d'intersection.

La symétrie du problème suggère que le point P appartient aussi au cercle (CBB_2C_1). Or

$$\widehat{CPB} = 360° - \widehat{BPA} - \widehat{CPA} = 180° - \widehat{BPA} + 180° - \widehat{CPA} = \widehat{CA_1A} + \widehat{AB_1B} = 180° - \widehat{CC_1B}$$

comme voulu. On montre ensuite que P appartient aux trois droites demandées. Or

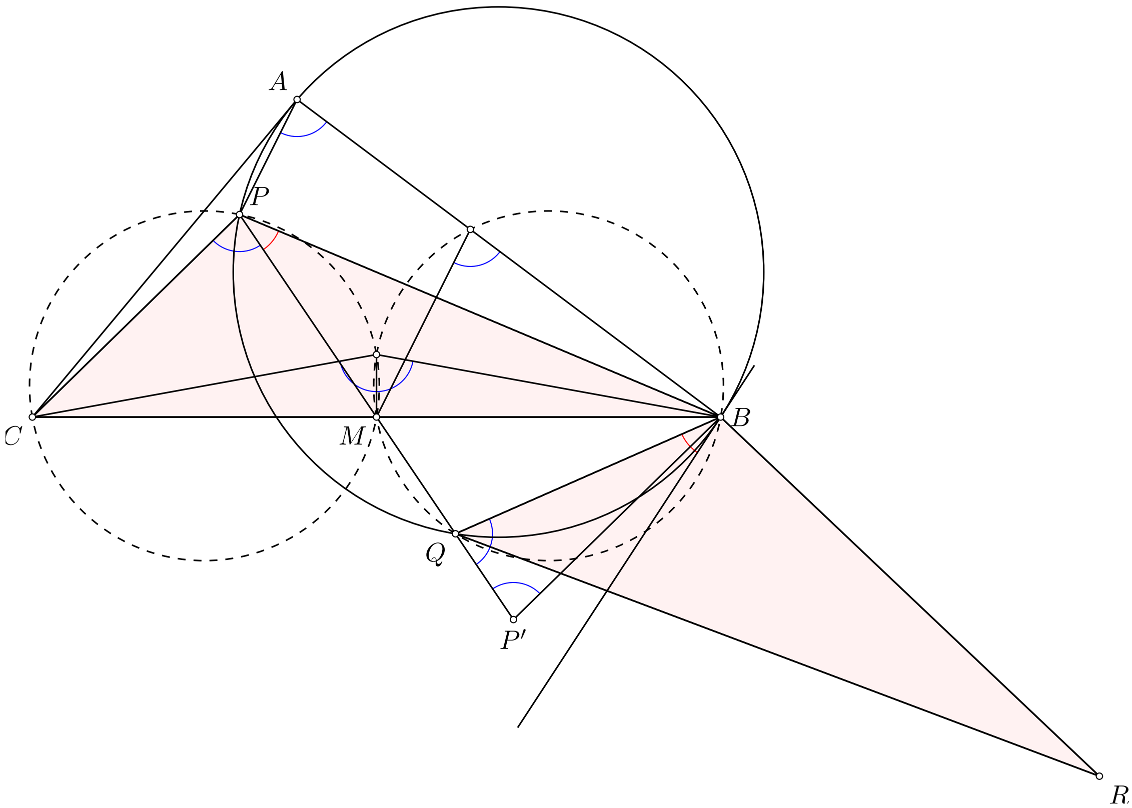
$$\widehat{A_1PB_2} = \widehat{A_1PC} + \widehat{CPB_2} = 90° + 90° = 180°$$

donc le point P appartient à la droite (A_1B_2). On procède de même pour les droites (C_2B_1) et (C_1A_2).

Remarque : On aurait également pu tracer les cercles circonscrits aux rectangles données dans l'espoir d'introduire un point intermédiaire intéressant.

Problème 8. (BXMO 2012) Soit ABC un triangle et soit M le milieu du segment $[BC]$. Soit P un point à l'intérieur du triangle ABC vérifiant que $\widehat{CPM} = \widehat{PAB}$. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle PAB. Soit Q le second point d'intersection de la droite (PM) avec le cercle Γ. Soit R le symétrique du point P par rapport à la tangente au cercle Γ en B. Montrer que quand P varie, la distance QR reste constante.

Solution 8.



Commençons par tracer la figure exacte, pour pouvoir faire des conjectures et avancer dans l'exercice.

Pour construire un tel point P, il va falloir rajouter des points intermédiaires pour avoir des angles intermédiaires. Il y a plusieurs pistes à explorer et plusieurs façons de faire, en voici une. On comme par tracer une droite issue du sommet A, sur laquelle nous placerons notre point P. Soit D un point sur cette droite à l'intérieur du triangle ABC. Une façon de créer un angle commode égal à $\widehat{DAB}$ est de tracer la parallèle à (AD) passant par M. On note E le point d'intersection de cette parallèle avec le segment $[AB]$. On a donc $\widehat{MEB} = \widehat{DAB}$. Pour passer au point P, on rajoute un point intermédiaire X sur la médiatrice du segment $[BC]$ et appartenant au cercle (MEB). Alors $\widehat{CXM} = \widehat{MXB} = \widehat{MEB} = \widehat{DAB}$. Donc il ne reste plus qu'à choisir P comme le point d'intersection de la droite (AD) et du cercle (CXM). On peut ensuite tracer le reste de la figure.

Une fois cette figure tracée, on peut conjecturer que les triangles CPB et QBR sont semblables et puisque $BR = BP$, ils sont isométriques et en particulier $QR = BC$, ce qui terminaerait l'exercice. On va donc montrer que $\widehat{QBR} = \widehat{CPB}$ et $QB = CP$.

Pour la première égalité d'angle, on utilise l'angle tangentiel et le fait que (BP) et (BR) sont symétriques par rapport à la tangente en B à Γ. On note Y un point quelconque sur cette tangente dans le même demi-plan délimité par la droite (AB) que le point Q :

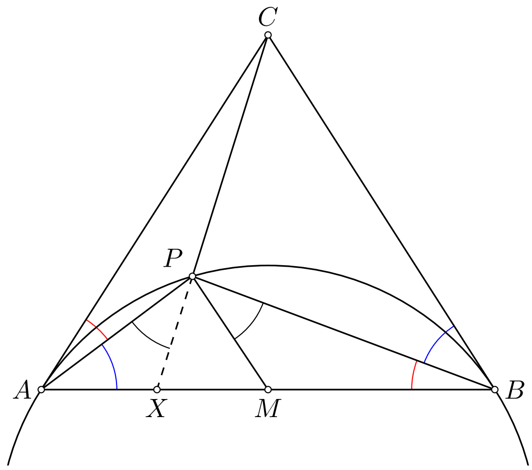
$$\widehat{QBR} = \widehat{QBY} + \widehat{YBR} = \widehat{QPB} + \widehat{YBP} = \widehat{QPB} + \widehat{PAB} = \widehat{CPM} + \widehat{MPB} = \widehat{CPB}$$

Pour montrer que $CP = BQ$, il reste encore à utiliser que le point M est le milieu du segment $[BC]$. La fçon la plus commode de procéder est donc de compléter le triangle CPB en un parallélogramme en introduisant P' le symétrique du point P par rapport au point M. Il suffit alors de montrer que $QB = BP'$, soit $\widehat{P'QB} = \widehat{QP'B}$. Or

$$\widehat{QP'B} = \widehat{MPC} = \widehat{PAB} = \widehat{P'QB}$$

ce qui permet de conclure.

Problème 9. (Pologne 2000) Soit ABC un triangle tel que $AC = BC$ et P un point à l'intérieur du triangle ABC vérifiant que $\widehat{PAB} = \widehat{PBC}$. Soit M le milieu du segment $[AB]$. Montrer que $\widehat{APM} + \widehat{BPC} = 180°$.



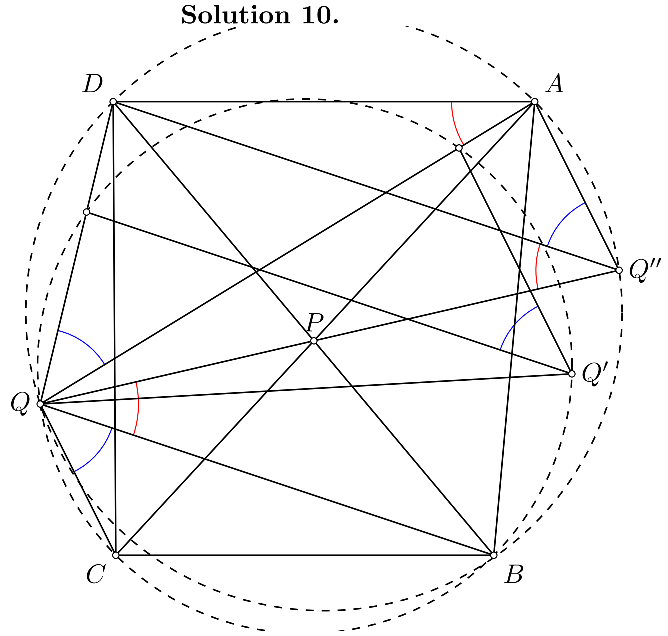
Solution 9.

D'après la conditon d'angle donnée, la droite (BC) est tangente au cercle circonscrit au triangle APB. De plus, puisque $\widehat{BAC} = \widehat{ABC}$, on a également $\widehat{PBA} = \widehat{PAC}$. La droite (AC) est donc tangente au cercle circonscrit au triangle APB aussi.

Le point C appartient donc à la symédiane issue du sommet P dans le triangle APB. Si X est le pied de cette symédiane, on a alors que $\widehat{APM} = \widehat{XPB} = 180° - \widehat{BPC}$ comme désiré.

Problème 10. (IMO SL 2007 G3) Soit $ABCD$ un trapèze avec les côtés AD et BC parallèles et dont les diagonales se coupent au point P. Le point Q est compris entre les droites (AD) et (BC) de telle sorte que $\widehat{AQD} = \widehat{BQC}$ et de telle sorte que les points P et Q sont situés de part et d'autre de la droite (CD). Montrer que $\widehat{BQP} = \widehat{DAQ}$.

Solution 10.



Pour construire la figure, on construit d'abord le point Q et le segment $[BC]$ et on construit le segment $[AD]$ ensuite. Pour transporter l'angle $\widehat{BQC}$, on utilise un point intermédiaire Q' sur le cercle (BCQ). On cherche à utiliser le théorème de l'angle inscrit dans ce cercle, mais pour cela il faut transporter l'angle $\widehat{BQC}$ pour obtenir un angle de même mesure issue du sommet Q'. On trace les parallèles aux droites (QB) et (QC) passant par Q'. Elles forment bien sûr un angle de mesure $\widehat{BQC}$. Elles recoupent le cercle (BQC) en deux points X et Y et d'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{XQY} = \widehat{XQ'Y} = \widehat{BQC}$. Pour construire le segment $[AD]$, on choisit une parallèle quelconque à la droite (BC) passant par deux points appartenant respectivement aux droites (QX) et (QY) et ces deux points seront les points A et D.

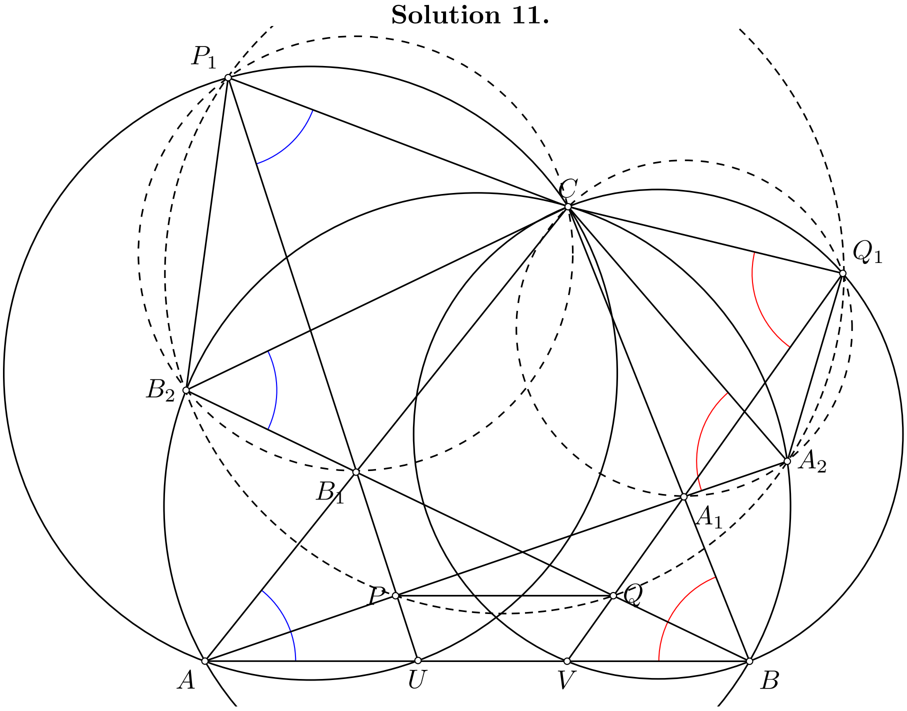
Passons à la résolution de l'exercice. Malheureusement, notre construction ne nous aide pas beaucoup ici. Cependant, en présence d'un trapèze, il est toujours bon de considérer les deux homothéties qui envoyent une base sur la deuxième. Ici, l'homothétie à considérer est tout indiquée : il s'gait de celle de centre P envoyant B sur D et C sur A. Si Q'' est l'image de Q par cette homothétie, les paires de droites $((AQ''), (QC))$ et $((DQ''), (BQ))$ sont deux à deux parallèles. On en déduit que $\widehat{AQ''D} = \widehat{BQC} = \widehat{AQD}$ donc le point Q'' appartient au cerlce (ADQ). On en déduit par le théorème de l'angle inscrit et par le parallélisme des droites (DQ'') et (QB) que

$$\widehat{DAQ} = \widehat{DQ''Q} = \widehat{BQP}$$

comme voulu.

Problème 11. (IMO 2019 P2) Soit ABC un triangle et soient A_1 et B_1 deux points appartenant respectivement aux côtés $[BC]$ et $[CA]$. Soient P et Q deux points appartenant respectivement aux segments $[AA_1]$ et $[BB_1]$, de telle sorte que les droites (PQ) et (AB) soient parallèles. Soit P_1 un point situé sur la droite (PB_1) tel que B_1 se trouve situé entre les points P et P_1 et tel que $\widehat{PP_1C} = \widehat{BAC}$. Soit Q_1 un point situé sur la droite (QC_1) tel que C_1 se trouve situé entre les points Q et Q_1 et tel que $\widehat{QQ_1C} = \widehat{ABC}$. Montrer que les points P, Q, P_1 et Q_1 sont cocycliques.

Solution 11.



On commence par tracer une figure exacte. La condition d'angle nous fait naturellement penser au théorème de l'angle inscrit. A cet effet, on introduit U et V les points d'intersection respectifs des droites (PB_1) et (A_1Q) avec le côté AB.

D'après le théorème de l'angle inscrit, les points P_1, C, U et A sont cocycliques, ce qui nous permet de construire le point P_1. De même on est capable de construire le point Q_1.

Cette construction peut nous inspirer une solution en barycentrique car on peut réécrire la condition de cocyclicité sous une condition autour de l'axe radical des deux cercles introduits et on peut alors tout calculer en temps fini.

On présente ici une solution géométrique.

Penser point intermédiaire. Un point intermédiaire intéressant est le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles dont l'un des angles est concerné par l'hypothèse d'angle

On introduit donc le point intermédiaire B_2, second point d'intersection des cercles (ABC) et (B_1P_1C). Par théorème de l'angle inscrit : $\widehat{B_1B_2C} = \widehat{B_1P_1C} = \widehat{CAB} = \widehat{BB_2C}$ donc les points B_2, B_1 et B sont alignés.

On introduit de même le point A_2, second point d'intersection des cercles (ABC) et (CA_1Q_1) et on montre de même que le point A_2 est sur la droite (AA_1).

On s'empresse de remarquer, puisqu'on a préalablement tracé le cercle supposé passer par les points P, Q, P_1 et Q_1, que les points A_2 et B_2 appartiennent également à ce cercle. Or on a

$$\widehat{QPA_2} = \widehat{BAA_2} = \widehat{BB_2A_2} = \widehat{QB_2, A_2}$$

donc les points P, Q, A_2 et B_2 sont cocycliques.

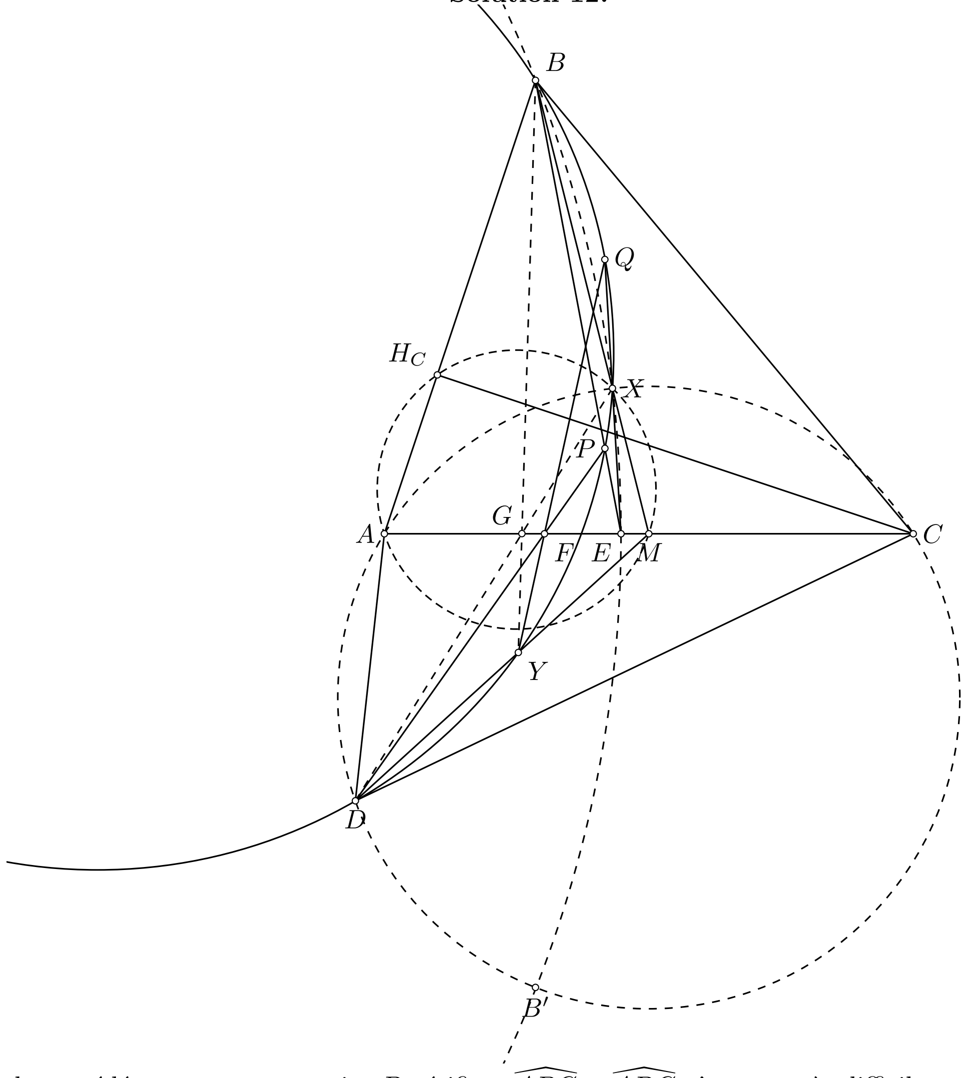
D'autre part,

$$\widehat{B_2P_1P} = \widehat{B_2P_1B_1} = \widehat{B_2CB_1} = \widehat{B_2BA} = \widehat{B_2QP}$$

donc le point P_1 appartient au cercle passant par les points B_2, P, Q et A_2. On montre de même que c'est aussi le cas du point Q_1, ce qui termine la preuve.

Problème 12. (IMO SL 2016 G6) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe vérifiant $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} < 90°$. Les bissectrices intérieures des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ coupent respectivement le segment $[AC]$ en les points E et F et se coupent entre elles au point P. Soit M le milieu du segment $[AC]$. Soit ω le cercle circonscrit au triangle BPD. Les segments $[BM]$ et $[DM]$ coupent ω respectivement aux points X et Y. Soit Q le point d'intersection des droites (XE) et (YF). Montrer que les droites (PQ) et (AC) sont perpendiculaires.

Solution 12.



Ici, le procédé pour tracer un point D vérifiant $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ n'est pas très difficile, et pourtant grâce à ce procédé nous allons pouvoir remarquer plein de propriétés utiles à la résolution de l'exercice.

On introduit le point B', symétrique du point B par rapport à la droite (AC) puis on choisit un point D sur le cercle $(AB'C)$. On trace ensuite le reste de la figure.

La première chose qui frappe est que le point X appartient au cercle $(AB'C)$ lui aussi. Rappelons que si H est l'orthocentre du triangle ABC, alors le point H appartient au cercle $AB'C$. Le point X serait donc le point d'intersection de la médiane avec ce cercle, il s'agirait donc du $B-$ Humpty Point, dont on connaît de nombreuses propriétés. Pour montrer que le point X est effectivement ce point, on procède dans l'autre sens : on montre que le point X' défini comme le point d'intersection de (AM) avec le cercle (ADC) est sur le cercle ω. D'une part :

$$\widehat{BPD} = \widehat{BEA} + \widehat{AFD} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \frac{1}{2}\widehat{ADC} + \widehat{ACD} = \widehat{ABC} + \widehat{BCD}$$

D'autre part, si H_C est le pied de la hauteur issue du sommet C dans le triangle ABC, les points H_C, X', M et A sont cocycliques (c'est une propriété du Humpty Point). On utilise ensuite que le point M est le centre du cercle passant par les points H_C, A et C :

$$\begin{aligned}
\widehat{BX'D} &= \widehat{BX'H_C} + \widehat{H_CX'A} + \widehat{AX'D} \\
&= \widehat{BAC} + \widehat{H_CMA} + \widehat{ACD} \\
&= 90° - \widehat{ACH_C} + 2\widehat{ACH_C} + \widehat{ACD} \\
&= \widehat{ABC} + \widehat{BCH_C} + \widehat{H_CCA} + \widehat{ACD} \\
&= \widehat{ABC} + \widehat{BCD}
\end{aligned}$$

Le point X' appartient donc au cercle ω, donc $X' = X$. De même le point Y appartient au cercle ABC.

La deuxième chose qui frappe est que le point Q appartient lui aussi au cercle ω ! Le cercle ω contiendrait donc 6 points. Pour le démontrer, nous avons donc envie d'uitliser le théorème de Pascal, ou plutôt sa réciproque. En effet, si les points B, Q, X, P, Y et D vérifient le théorème de Pascal, ils appartiendront à la même conique, or la conique définie par les points B, X, P, Y et D est un cercle.

L'hexagone le plus commode à utiliser, étant donné les points introduits, semble être l'hexagone $QYBPDX$, c'est-à-dire qu'il faut montrer que les points $F = (QY) \cap (PD)$, $G := (YB) \cap (DX)$ et $E = (XQ) \cap (BP)$ sont alignés. En d'autres mots, il faut montrer que les droites (BY) et (DX) se coupent sur la droite (AC). Or ces trois droites sont les axes radicaux des paires de cercles formées avec ω, (ABC) et (ACD), elles sont donc concourantes. Le point Q appartient donc au cercle ω.

Pour conclure, nous allons montrer que $\widehat{PQX} + \widehat{XEA} = 90°$.
Avec le théorème de l'angle inscrit dans ω :

$$\widehat{PQX} = \widehat{PBX} = \widehat{EBM}$$

Soit d la perpendiculaire à la droite (AC) passant par le point E. Il suffit désormais de montrer que la droite d est tangente au cercle (BXE). Comme la droite d est perpendiculaire à la droite (AC), il suffit en fait de montrer que le point B', symétrique du point B par rapport à la droite (AC), appartient au cercle (BXE), car alors de fait le centre de ce cercle sera sur (AC) et on aura la tangence désirée.
Tout d'abord,

$$\widehat{BEB'} = 2\widehat{BEA} = 2\left(\frac{1}{2}\widehat{ABC} + \widehat{BCA}\right) = \widehat{ABC} + \widehat{BCB'}$$

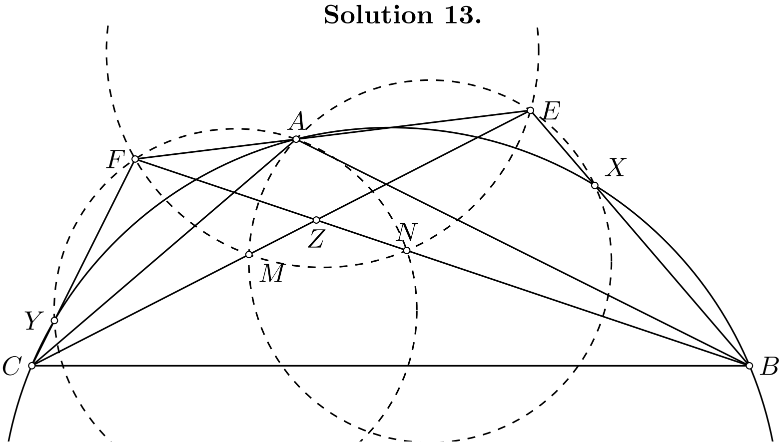
D'autre part, en utilisant les calculs faits en début d'exercice :

$$\widehat{BXB'} = \widehat{BXA} + \widehat{AXB'} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB}\widehat{ACB'} = \widehat{ABC} + \widehat{BCB'}$$

On a donc le résultat voulu.

Problème 13. (EGMO 2021 P3) Soit ABC un triangle dont l'angel en A est obtus. Soient E et F les points d'intersection respectifs de la bissectrice extérieur de l'angle $\widehat{BAC}$ avec les hauteurs issues des sommets B et C. Soit M un point du segment $[EC]$ tel que $\widehat{EMA} = \widehat{ACB}$. Soit N un point du segment $[FB]$ tel que $\widehat{ANF} = \widehat{ABC}$. Montrer que les points E, M, N et F sont cocycliques.

Solution 13.



Pour tracer le point M, on introduit un point intermédiaire.

Penser point intermédiaire ! Un point intermédiaire intéressant est le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles dont l'un des angles est concerné par l'égalité d'angle

Ici, on considère donc le point X, second point d'intersection des cercles (ABC) et (AEM). En pratique, on choisit X comme le second point d'intersection de la droite (EB) et du cercle (ABC). Alors on a bien par théorème de l'angle inscrit $\widehat{AXE} = \widehat{ACB}$. On choisit alors le point M comme le point d'intersection de la droite (CE) et du cercle (AXE).

On construit de même le point N à l'aide du point intermédiaire Y défini comme le second point d'intersection du cercle (ABC) avec la droite (CF).

Cette construction nous a apporté deux points et deux cercles. On constate que démontrer que les points E, M, N et F sont cocycliques revient à montrer que le point Z d'intersection des droites (BF) et (CE) appartient à l'axe radical des cercle (AME) et (ANF). En effet, on aura alors $ZM \cdot ZE = ZN \cdot ZF$.

Cette caractérisation est facile à exprimer en coordonnées barycentriques. Puisqu'il y a peu de points, on peut s'essayer au calcul.

On choisit ABC comme repère et a, b et c désignent les longueurs usuelles. On adopte également les notations de Conway pour les quantités S_A, S_B et S_C.

On calcule les coordonnées du point E. Si I_C est le centre du cercle $C-$exinscrit au triangle ABC, le point E est sur la droite (AI_C) donc ses coordonnées sont de la forme $(t, b, -c)$. Le point E appartient à la hauteur issue du sommet B donc ses coordonnées s'écrivent également de la forme (S_C, s, S_A). On en déduit que le point E a pour coordonnées $(cS_C, -bS_A, cS_A)$. De même, le point F a pour coordonnées $(bS_B, bS_A, -cS_A)$.

Le point Z a donc ses coordonnées de la forme $(bS_B, s, -cS_A)$ d'une part et $(cS_C, -bS_A, t)$ d'autre part. Ses coordonnées sont donc $(-bcS_BS_C, b^2S_AS_B, c^2S_AS_C)$.

On calcule les coordonnées du point X. Il appartient à la droite (BE), ses coordonnées sont donc de la forme (S_C, s, S_A). Il appartient au cercle (ABC) donc

$$s(a^2S_A + c^2S_C) = -b^2S_AS_C$$

Les coordonnées du point X sont donc $(S_C(a^2S_A + c^2S_C), -b^2S_AS_C, S_A(a^2S_A + c^2S_C))$. De même, les coordonnées du point Y sont $(S_B(a^2S_A + b^2S_B), S_A(a^2S_A + b^2S_B), -c^2S_AS_B)$.

On calcule à présent les paramètres du cercle (AEX). On sait déjà que $u = 0$ puisque le cercle passe par le point A. Puisque le point X appartient au cercle (ABC), $-a^2y_Xz_X - b^2z_Xx_X - c^2x_Xy_X = 0$ et donc en injectant ses coordonnées dans l'équation du cercle (AEX) on a

$$w(a^2S_A + c^2S_C) = vb^2S_C$$

On injecte à présent les coordonnées du point E dans l'équation de cercle :

$$\begin{aligned}
0 &= a^2bcS_A^2 - b^2c^2S_AS_C + bc^3S_AS_C + (-vbS_A + wcS_A)(\underbrace{cS_C + cS_A}_{cb^2} - bS_A) \\
&= bS_A\left(a^2cS_A - bc^2S_C + c^3S_C + (wc - vb)(cb - S_A)\right)
\end{aligned}$$

On injecte la première équation liant v et w :

$$v\left(c\frac{b^2S_C}{a^2S_A + c^2S_C} - b\right)(cb - S_A) = bc^2S_C - c^3S_C - a^2cS_A$$

et après simplification :

$$vb(cb - S_A) = c(a^2S_A + c^2S_C)$$

On pose $V_B = v(bc - S_A) = \dfrac{c}{b}(a^2S_A + c^2S_C)$ et $W_B = (bc - S_A)w = bcS_C$.
On trouve de même $V_C = bcS_B$ et $W_C = \dfrac{b}{c}(a^2S_A + b^2S_B)$.
Il reste alors à vérifier que les coordonnées de Z satisfont

$$(V_B - V_C)y_Z + (W_B - W_C)z_Z = 0$$

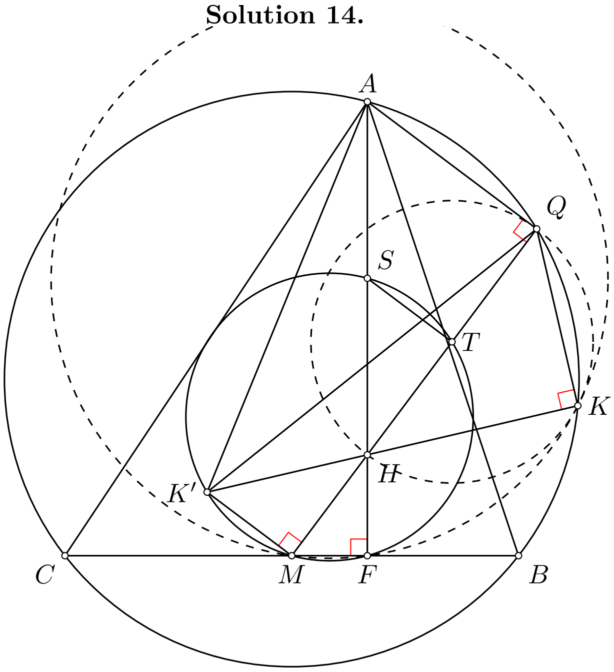
Or

$$\begin{aligned}
(V_B - V_C)b^2S_B + (W_B - W_C)c^2S_C &= cbS_B(a^2S_A + c^2S_C) - b^3cS_B^2 + c^3bS_C^2 - bcS_C(a^2S_A + b^2S_B) \\
&= cb\left(S_B(\underbrace{a^2S_A + c^2S_C - b^2S_B}_{\frac{1}{2}(b^4-(a^2-c^2)^2)}) - S_C(\underbrace{a^2S_A - b^2S_B + c^2S_C}_{\frac{1}{2}(c^4-(a^2-b^2)^2)})\right) \\
&= 2bcS_A\left(-S_BS_C + S_CS_B\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc le point Z appartient bien à l'axe radical des cercles (AEX) et (BFY), comme désiré.

Problème 14. (IMO 2015 P3) Soit ABC un triangle tel que $AB > AC$ et soit Γ son cercle circonscrit. Soit H son orthocentre, M le milieu du segment $[BC]$ et F le pied de la hauteur issue du sommet A. Soit Q un point du cercle Γ tel que $\widehat{AQH} = 90°$. Soit K un point du cercle Γ tel que $\widehat{QKH} = 90°$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles KQH et KFM sont tangents entre eux.

Solution 14.



Tout d'abord, on reconnaît le point Q comme le point d'intersection de la droite (HM) et du cercle (ABC) qui n'est pas le symétrique de H par rapport à M.

On effectue une inversion de centre H et de rayon $\sqrt{AH \cdot HF}$. L'inversion échange F et A, Q et M et le cercle Γ avec le cercle d'Euler du triangle ABC. On note K' l'image du point K par l'inversion. Le point K' appartient donc au cercle d'Euler.

Le cercle (HKQ) est échangé avec la droite $(K'M)$ et le cercle (KMF) est échangé avec le cercle $(K'AQ)$.

On doit donc démontrer que la droite $(K'M)$ est tangente au cercle $(AK'Q)$. Or on a $\widehat{K'MH} = \widehat{HKQ} = 90°$, donc les droites $(K'M)$ et (AQ) sont parallèles. Il suffit donc de montrer que le centre du cercle $(AK'Q)$ appartient à la médiatrice du segmant $[AQ]$, c'est-à-dire que $AK' = K'Q$. Etant donné que les paires de droites $(K'M)$ et (AQ) sont perpendiculaires entre elles, il est suffisant de montrer que $AQ = 2K'M$.

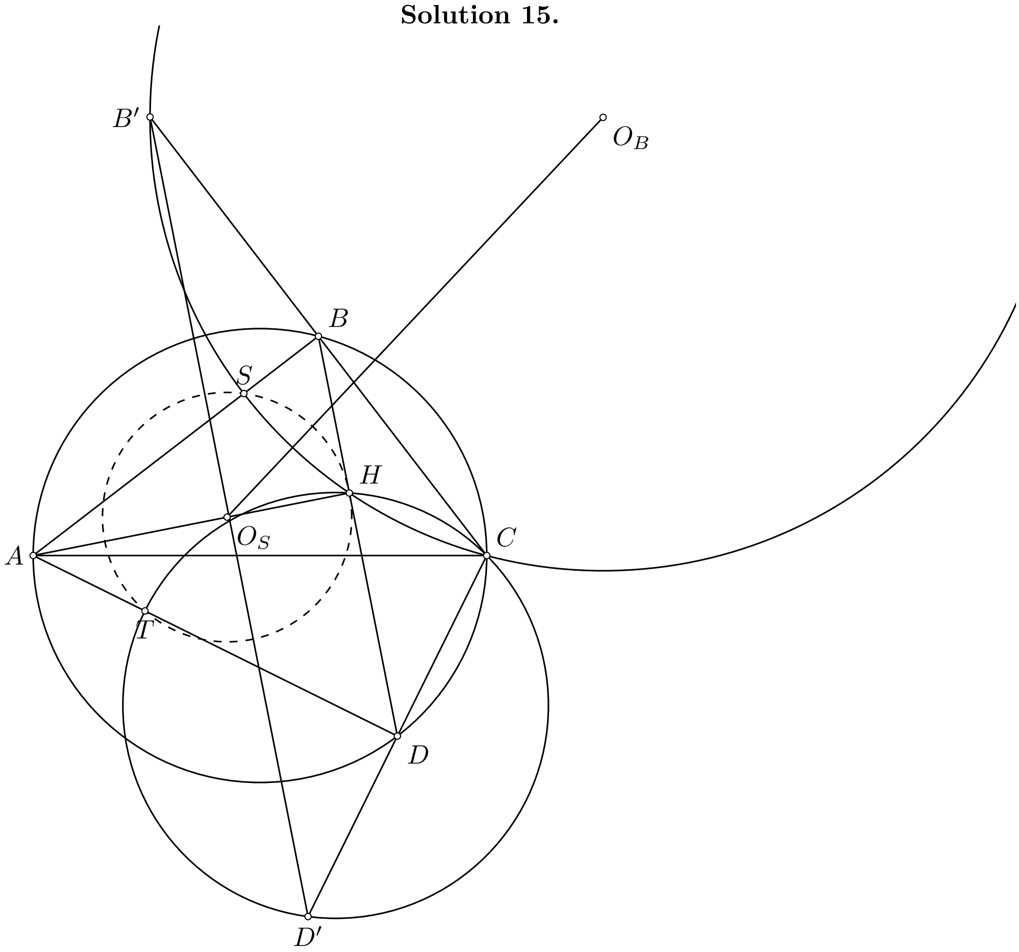
On introduit pour cela S le milieu du segment $[AH]$ et T le milieu du segment $[HQ]$. Les points S et T appartiennent au cercle d'Euler du triangle ABC par définition de celui-ci comme l'image de Γ par une homothétie de centre H et de facteur $\frac{1}{2}$. L'angle $\widehat{K'MT}$ étant droit et les droites (ST) et $(K'M)$ étant parallèles (car parallèles à la droite (AQ), le quadrilatère $K'MST$ est un rectangle. On a donc $K'M = ST = \frac{1}{2}AQ$, ce qui conclut.

Problème 15. (IMO 2014 P3) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90°$. Soit H le pied de la hauteur issue du sommet A dans le triangle ABD. Soient S et T appartiennent respectivement aux côtés AB et AD de telle sorte que

$$\widehat{SHC} - \widehat{BSC} = 90° \quad \text{et} \quad \widehat{THC} - \widehat{DTC} = 90°$$

Montrer que la droite (BD) est tangente au cercle circonscrit au triangle HST.

Solution 15.



Commençons par chercher comment placer les points S et T. pour cela il y a plusieurs façon de faire (par exemple, on peut regarder une inversion de centre C), la plus simple est de manipuler l'égalité d'angle donnée.

Si on introduit la perpendiculaire à la droite (AD) en T et si X est un point quelconque de cette perpendiculaire dans le même demi-plan délimité par (AD) que C, alors

$$\widehat{XTC} = 90° - \widehat{DTC} = 180° - \widehat{THC}$$

ce qui signifie que (XT) est tangente en T au cercle (THC). Donc la tangente au cercle (THC) est perpendiculaire à la droite (AD), donc la droite (AD) contient le centre du cercle. Cela signifie que le symétrique D' du point C par rapport au point D appartient au cercle (THC). On peut désormais tracer le point T et de même le point S, en posant B' le symétrique du point C par rapport au point B.

On déduit tout de suite que $AD' = AC = AB'$. Comme les droites $(D'B')$ et (DB) sont parallèles, les droites (AH) et $(D'B')$ sont perpendiculaires, donc la droite (AH) est la médiatrice du segment $[B'D']$, si bien que $HB' = HD'$.

Pour démontrer le problème, il suffit donc de montrer que les médiatrices des segments $[SH]$ et $[TH]$ se coupent sur le segment $[AH]$. On notera dans la suite O_B et O_D les centres respectifs des cercles (CSB') et (CTD'). Si on note O_S le point d'intersection de la médiatrice sur segment $[SH]$ avec le segmant $[AH]$ et que l'on définit de manière similaire le point O_T, il suffit de montrer que

$$\frac{O_SA}{O_SH} = \frac{O_TA}{O_TH}$$

On calcule $\frac{O_SA}{O_SH}$. D'après le théorème de la bissectrice, puisque (O_SO_B) est la bissetrice de l'angle $\widehat{SO_BH}$, et d'après la loi des sinus dans le triangle AO_BC, on a

$$\frac{O_SA}{O_SH} = \frac{AO_B}{O_BH} = \frac{AO_B}{O_BC} = \frac{\sin\widehat{ACO_B}}{\sin\widehat{CAB}} = \frac{\sin(\widehat{CAB} + \widehat{CO_BB}))}{\sin\widehat{CAB}} = \cos\widehat{BO_BC} + \frac{\sin\widehat{BO_BC}}{\tan\widehat{CAB}}$$

On calcule chaque terme séparément et notre objectif est de se ramener au quadrilatère $ABCD$ pour montrer que la quantité que l'on calcule est symétrique en les paramètres du quadrliatère $ABCD$, de sorte que les deux rapports seront fatalement égaux.

D'une part, avec le théorème de l'angle au centre, on a

$$\cos\widehat{BO_BC} = \cos(180° - \widehat{B'HC}) = -\cos\widehat{B'HC}$$

Le théorème d'Al-Kashi nous donne alors

$$-\cos\widehat{B'HC} = \frac{B'C^2 - HC^2 - HB'^2}{HC \cdot HB'} = \frac{4BC^2 - HC^2 - HB'^2}{2HC \cdot HB'}$$

Puisque $HB' = HD'$, on est sur la bonne voie. D'autre part,

$$\frac{\sin\widehat{BO_BC}}{\tan\widehat{CAB}} = \frac{AB}{BC} \cdot \sin\widehat{BO_BC} = \frac{AB}{O_BC}$$

En utilisant à nouveau Al-Kashi dans le triangle $B'HO_B$ et en posant $R_B = O_BC = O_BH = O_BB'$:

$$HB'^2 = 2R_B^2 - 2R_B^2\cos 2\widehat{B'CH} = 4R_B^2\sin^2\widehat{BCH}$$

donc avec la loi des sinus dans le triangle BHC :

$$\frac{AB}{O_BC} = 2\frac{AB}{HB'}\sin\widehat{BCH} = 2\frac{AB}{HB'} \cdot \frac{BH}{CH}\sin\widehat{DBC} = 2\frac{AB \cdot BH \cdot \cos\widehat{ABH}}{CH \cdot HB'} = 2\frac{BH^2}{CH \cdot HB'}$$

On somme le tout et on utilise Pythagore :

$$\begin{aligned}
\cos\widehat{BO_BC} + \frac{\sin\widehat{BO_BC}}{\tan\widehat{CAB}} &= \frac{4BC^2 - HC^2 - HB'^2}{2HC \cdot HB'} + 2\frac{BH^2}{CH \cdot HB'} \\
&= \frac{2}{HB' \cdot HC}(BC^2 + BH^2) - \frac{HC^2 + HB'^2}{2HC \cdot HB'} \\
&= \frac{2}{HB' \cdot HC}(AC^2 - AH^2) - \frac{HC^2 + HB'^2}{2HC \cdot HB'}
\end{aligned}$$

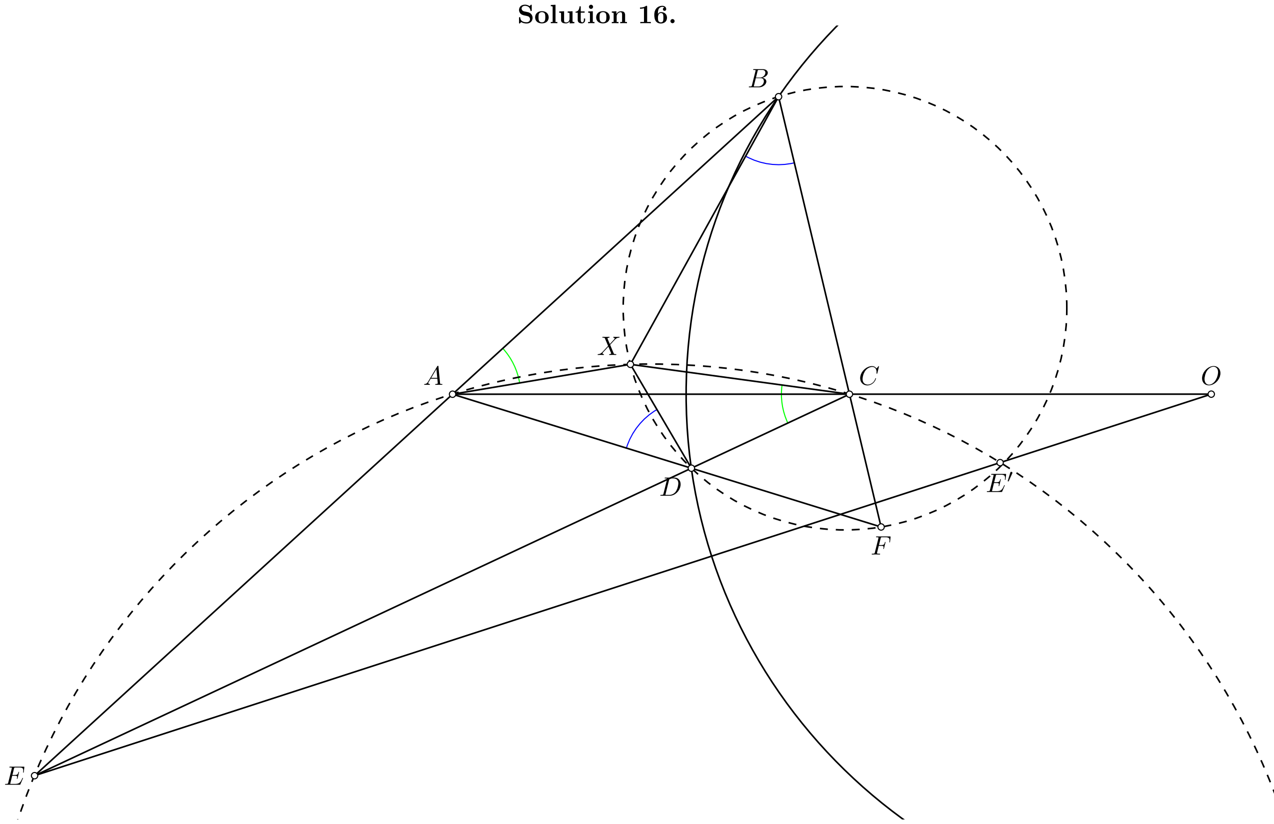
De même on trouvera :

$$\frac{O_TA}{O_TH} = \frac{2}{HD' \cdot HC}(AC^2 - AH^2) - \frac{HC^2 + HD'^2}{2HC \cdot HD'}$$

et comme$HB' = HD'$, on a bien $\frac{O_SA}{O_SH} = \frac{O_TA}{O_TH}$ et le problème est terminé.

Problème 16. (IMO 2018 P6) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Soit X un point à l'intérieur du quadrilatère $ABCD$. On suppose que $\widehat{XAB} = \widehat{XCD}$ et $\widehat{XBC} = \widehat{XDA}$. Montrer que $\widehat{AXB} + \widehat{CXD} = 180°$.

Solution 16.



L'hypothèse sur le produit des longueurs signifie que le point D est sur le $B-$cercle d'Apollonius du triangle ABC, ce qui nous permet déjà de tracer le quadrilatère $ABCD$.

Avant de placer le point X, on doit en étudier quelques propriétés. Examinons l'égalité $\widehat{XAB} = \widehat{XCD}$. Les deux angles ne couvrent pas le même arc, donc on regarde plutôt $180°$ moins chacun des deux angles. Si E est le point d'intersection des droites (AB) et (CD), l'égalité devient $\widehat{EAX} = 180° - \widehat{XCE}$ donc le point X appartient au cercle (ACE). De même, en notant F le point d'intersection des droites (AD) et (BC), le point X appartient au cercle (BDF). On peut donc tracer le point X !

Passons à la résolution du problème. La présence du $B-$cercle d'Apollonius nous encourage à effectuer une inversion. On pose donc O le centre du $B-$cercle d'Apollonius relatif au triangle ABC et on note i l'inversion de centre O de rayon OB. L'inversion fixe B et D et échange A et C. Le point $E = (AB) \cap (CD)$ est envoyé sur le point $E' = (OAB) \cap (OCD)$. On a

$$\widehat{AE'C} = \widehat{AE'O} - \widehat{CE'O} = \widehat{OAE} - \widehat{OCE} = \widehat{CEA}$$

Le point E' appartient donc au cercle (ACE).

On calcule désormais l'angle $\widehat{AXB}$.

$$\begin{aligned}
\widehat{AXB} &= 360° - \widehat{BXE'} - \widehat{AXE'} \\
&= 180° - \widehat{BDE'} + \widehat{AEO} \\
&= 180° - \widehat{BDO} - \widehat{ODE'} + \widehat{AEO} \\
&= 180° - \widehat{BDO} - \widehat{OED} + \widehat{AEO} \\
&= 180° - \widehat{BDO} + \widehat{AEC}
\end{aligned}$$

On calcule désormais $\widehat{CXD}$.

$$\begin{aligned}
\widehat{CXD} &= \widehat{CXE'} + \widehat{E'XD} \\
&= \widehat{CEE'} + \widehat{DBE'} \\
&= \widehat{DEE'} + \widehat{DBO} - \widehat{E'BO} \\
&= \widehat{DBO} + \widehat{DEO} - \widehat{BEO} \\
&= \widehat{DBO} - \widehat{AEC}
\end{aligned}$$

et on a bien $\widehat{AXB} + \widehat{CXD} = 180°$.