Théorème de Hall - Groupe Senior Avancé

Victor Vermès - 20 avril 2021

Introduction

Ce cours est en grande partie une issu de : https://cjquines.com/files/halls.pdf
Cette section vise à fournir un support écrit pour le cours, mais n'a pas vocation à se lire de manière indépendante du cours : dans ce cas, mieux vaut se référer à https://cjquines.com/files/halls.pdf

Voici deux exercices introductifs qui visent à présenter la notion de couplage :
Exercice 1 (Kazakhstan 2003) On dispose de deux feuilles de papier carrés, d'aire 2003. On suppose que chacun de ces papiers est divisé en 2003 polygones, chacun étant d'aire 1. En suite on superpose ces feuilles de papier l'une sur l'autre. Montrer que l'on peut placer 2003 épingles de telle sorte à ce que tous les 4006 polygones aient été percés.

Exercice 2 Soit n un entier entre 1 et 8. On considère un échiquier 8×8 tel que chaque ligne et chaque colonne ait exactement n pièces. Montrer que l'on peut choisir 8 pièces telles que chaque ligne et chaque colonne contienne exactement une de ces pièces.

Soit G un graphe bipartite (c'est-à-dire qu'on peut séparer ses sommets en deux groupes U et V, avec aucune arête reliant deux sommets de U entre eux et aucune arête ne reliant deux sommets de V). Un couplage des sommets de G est une partie des arêtes de G telle que chaque sommet appartienne au plus à une de ces arêtes. Ce couplage est dit parfait si chaque sommet est recouvert par une arête du couplage.

Le théorème de Hall permet de montrer l'existence de couplage recouvrant une partie d'un graphe bipartite.

Théorème de Hall

Théorème 1 (1)**.**
Soit G un graphe biparti fini, et on note U et V les deux groupes de sommets. Alors Il est possible de recouvrir tous les sommets de U par un couplage avec des sommets de V si et seulement si pour tout sous-ensemble W de U, le nombre de voisins N(W) dans G de W est plus grand que le nombre d'éléments de W.

Théorème 2 (2)**.**
On considère un groupe d'hommes et de femmes hétérosexuelles. On cherche à marier tous les hommes de groupes. On suppose que chaque femme est d'accord pour se marier avec certains des hommes, et que cette relation est réciproque. Il est possible de marier toutes les hommes si et seulement si pour tout groupe d'hommes, le nombre de femmes qui aiment au moins un de ces hommes est supérieur au nombre de membre de ce groupe d'homme.

Remarque 3.
Pour montrer l'existence de couplages parfaits, il suffit de montrer que U et V ont le même nombre de sommets et qu'il existe un recouvrement de U par un couplage avec V.

Solution de l'exercice 1 On cherche à faire un couplage parfait entre les deux polygones des deux carrés, et deux polygones sont reliés si et seulement s'ils ont au moins un point superposé. Or si l'on choisit un sous-ensemble de n polygones du premier carré, son aire vaut au moins n, donc il y a au moins n polygones d'aire 1 qui ont un point en commun avec cet ensemble d'aire n. La condition du théorème de Hall est vérifiée, il existe donc un tel couplage parfait.

Solution de l'exercice 2 On cherche à coupler les lignes et les colonnes. Une ligne et une colonne sont reliés s'il y a une pièce sur leur intersection. Montrons que la condition du théorème de Hall est vérifiée. Soit W un sous ensemble de k lignes. Alors il y a exactement nk pièces sur ces k lignes. Or chaque colonne contient au plus n pièces, donc ces nk pièces sont sur au moins k colonnes. La condition de Hall est donc vérifiée. Le couplage parfait des lignes et des colonnes nous donne la position des pièces à garder.

La page Wikipedia https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Hall fournit une preuve simple de ce théorème.

Exercices

Entrée

Exercice 3 (Théorème des mariages de König) : Soit G un graphe biparti non vide ou chaque sommet est de même degré. Montrer que G admet un couplage parfait.

Solution de l'exercice 3 Ce problème est une reformulation de l'exercice 2 sur l'échiquier : les lignes et les colonnes étant les sommets du graphes, et la condition de degré égale étant la condition du nombre de pièces égale dans chaque ligne et colonne.

Exercice 4 On dispose de 52 cartes d'un jeu de cartes ordinaire, il y a donc 4 cartes de chacune des 13 valeurs possibles. On a distribué (au hasard) les cartes en 13 paquets de 4 cartes. Montrer qu'il est possible d'enlever une carte de chaque tas pour avoir une carte de chaque valeur. Montrer qu'on peut même continuer : après avoir enlevé 13 cartes, il reste 3 cartes dans chaque pile. Montrer qu'on peut prendre une carte de chaque pile pour avoir de nouveau une carte de chaque valeur. Et ainsi de suite avec les piles de 2 restantes, puis les piles de 1 carte.

Solution de l'exercice 4 On cherche un couplage parfait entre les valeurs et les piles, on relie une valeur et une pile si dans la pile il y a au moins une carte de cette valeur. Or, pour chaque sous ensemble de k piles, il y a $4k$ cartes dedans, et donc au moins k valeurs différentes. La condition du théorème de Hall est donc vérifiée. On enlève des cartes qui correspondent au couplage (il peut y avoir plusieurs choix).

Pour la deuxième partie de l'exercice, il suffit de réitérer le même argument avec des piles de 3 cartes au lieu de 4.

Exercice 5 Dans un tournoi de $2m$ équipes, chaque équipe affronte une fois chaque autre équipe au cours de $2m-1$ journées. Il n'y a pas de matchs nuls. Montrer que l'on peut, chaque jour, choisir une équipe qui a gagnée ce jour là et de telles sortes à avoir choisi $2m-1$ équipes différentes.

Solution de l'exercice 5 On cherche un couplage entre les jours et les équipes qui recouvre tous les jours. On souhaite montrer que dans tous sous-ensemble de k jours, il y a au moins k équipes qui ont gagné une fois, c'est-à-dire au plus $2m-k$ équipes qui ont perdu tous leurs matchs. Or, si l'on note l le nombre d'équipes qui ont perdu tous leurs matchs, elles ne peuvent pas s'être affronté entre elles durant ces k jours, donc le nombre de matchs possibles pour 1 équipe perdante vérifie $2m-1-(l-1) \geqslant k$. La condition du théorème de Hall est donc vérifiée. source : problème B3 https://kskedlaya.org/putnam-archive/2012s.pdf

Plat

Exercice 6 Dans une race alien, il y a 3 genres : *male*, *emale* et *female*. Un triplet de mariage est un ensemble de 3 personnes, un de chaque genre, qui s'aiment tous entre eux. Chaque alien appartient a au plus un triplet de mariage, et pour cette race alien, l'amour est toujours réciproque. Une expédition de cette race alien est envoyée sur une nouvelle planète. L'expédition est composée de n personnes de chaque genre. On suppose que chaque membre de l'expédition aime au moins k personnes de chaque autre genre. On souhaite créer le maximum de triplets de mariage possible pour garantir la descendance de l'expédition. Montrer que si $k \geqslant \frac{3n}{4}$, il est toujours possible de créer n triplets de mariages disjoints.

Solution de l'exercice 6 On procède en deux étapes, d'abord on couple les male et emale, et ensuite on couple les couple male-emale avec les female. De plus, puisque chaque male et chaque emale aiment au moins $\frac{3n}{4}$ female, chaque couple male-emale aime (les deux membres du couple aiment) au moins $\frac{n}{2}$ female. Pour montrer les deux couplages, il suffit donc de montrer que dans un graphe bipartite ou de n sommets de chaque côté, où tous les degrés sont plus grands que $\frac{n}{2}$, un couplage parfait existe. Montrons que la condition du théorème de Hall est vérifiée : Si l'on choisit k personnes du premier groupe, si $k \leqslant \frac{n}{2}$, une des personnes a au moins $\frac{n}{2}$ voisins donc il n'y a rien à montrer. Si $k > \frac{n}{2}$, alors toutes autres personnes du deuxième groupe sont voisines de ces personnes : en effet, elles ont au moins $\frac{n}{2}$ voisins chacun. On applique deux fois ce résultat pour trouver des triplets de mariage.

Source : problème 2b : https://imc-math.org.uk/imc2011/imc2011-day2-solutions.pdf

Exercice 7 Tous les sommets d'un graphe bipartite sont de degré d. Quel est le plus grand nombre d'arêtes qu'on puisse enlever en restant sûr que le graphe obtenu admette un couplage parfait.

Solution de l'exercice 7 Montrons que la réponse est $d-1$. En enlevant d arêtes issues d'un même sommet, ce sommet est de degré 0 et le couplage parfait est impossible. Si l'on enlève $d-1$ arêtes, on considère un sous-ensemble de k sommets de la partie gauche du graphe bipartite. Il y a au moins $kd-(d-1)=(k-1)d+1$

arêtes sortant de ces sommets, et chaque sommet de l'autre partie du graphe est au plus de degré d, donc il y a au moins k sommets reliésà ces autres sommets. On peut donc appliquer le théorème de Hall.

Exercice 8 (Fabriquer des carrés latins) Soit $k < n$ des entiers. On se donne une grille $k \times n$, avec dans chaque case des nombres de 1 à n. On sait que sur chaque ligne et chaque colonne, chaque nombre apparaît au plus 1 fois. Montrer que l'on peut étendre cette grille à une grille $n \times n$ vérifiant les mêmes règles.
Solution de l'exercice 8 Il suffit de montrer que l'on peut étendre la grille à une grille $(k+1) \times n$, puis de ré-

appliquer l'argument jusqu'à atteindre une grille $n \times n$. On souhaite coupler les colonnes et les numéros de 1 à n : chaque sommet est de degré $n-k$, comme dans les exercices précédents on conclue qu'un tel couplage existe.

Exercice 9 (Théorème de König) Une grille $m \times n$ est remplie par des 0 et des 1. On appelle *trait* une ligne ou une colonne. Montrer que le nombre minimal de traits contenant tous les 1 est le nombre maximal de 1 que l'on peut trouver sans que deux d'entre eux soient alignés.

Solution de l'exercice 9 On peut représenter cette situation dans un graphe bipartite, dont les sommets sont les lignes et les colonnes, et qui sont reliés par une arête s'il y a un 1 à leur intersection. Il faut au moins un trait par 1 non aligné, donc il est clair que le nombre minimal de traits contenant tous les 1 est plus grand que le nombre maximal de 1 que l'on peut trouver sans que deux d'entre eux soient alignés.

Réciproquement, on part d'un recouvrement minimal des 1 par des traits des lignes et des colonnes), et on souhaite montrer que l'on peut en déduire un ensemble maximal de 1 non alignés. Pour cela, on va coupler les lignes sélectionnées avec des colonnes non sélectionnées, en recouvrant les lignes sélectionnées et on va coupler les colonnes sélectionnées avec des lignes non sélectionnées, en recouvrant les colonnes sélectionnées. Ces couplages nous donnent un point par arête, qui seront deux à deux non alignés, et il y aura autant de points que de points dans le recouvrement minimal par des traits.

Il reste donc à montrer que ce couplage existe, par le théorème de Hall : en effet, si l'on considère k lignes sélectionnées, par minimalité du recouvrement, il y a au moins k colonnes non sélectionnées qui sont voisines de ces lignes : sinon, on pourrait obtenir un recouvrement plus petit par des traits en échangeant ces k lignes et les colonnes voisines.

Il y a également des preuves directes de ce théorème (cf page wikipedia du théorème)

Dessert

Exercice 10 Sur une certaine planète, il y a 2^N pays, où $N \geqslant 4$. Chaque pays a un drapeau qui est un rectangle de largeur N et hauteur 1, composé de N petits carrés 1×1 qui peuvent être jaunes ou bleus. On dit qu'une partie de N drapeau est *diversifiée* si on peut placer les N drapeaux en un carré $N \times N$ de telle sorte que les N carrés sur la diagonale soient de la même couleur.

Quel est le plus petit entier M tel que parmi M drapeaux distincts, il y a toujours un sous-ensemble de N drapeaux *diversifié*.

Solution de l'exercice 10 La réponse est $M = 2^{N-2} + 1$. Pour $M = 2^{M-2}$, on peut regarder les drapeaux commençant par les deux cases "jaune bleu", il y en à 2^{M-2} et n'admettent pas de sous-ensemble diversifié.

Pour $M = 2^{N-2} + 1$, construisons deux graphes entre les M drapeaux et les N colonnes, un graphe jaune qui relie un drapeau et une colonne si la colonne est jaune, et un graphe bleu.

Montrons que pour l'un des deux graphes au moins, on peut coupler les colonnes et les drapeaux en recouvrant les colonnes, et le problème est alors résolu en choisissant le bon ordre pour les drapeaux couplés.

Soit W un sous ensemble de k colonnes. Si $k \geqslant 3$, il y a au plus 2^{N-k} drapeaux qui est voisin avec aucune des colonnes, or $M - 2^{N-k} \geqslant k$ car $N \geqslant 4$, donc il y a au moins k voisins. Si $k = 2$, il y a au moins $M - 2^{N-2} = 1$ drapeaux voisins. Si ce nombre vaut exactement 1, c'est que tous les drapeaux sauf 1 ont deux colonnes jaunes (resp. bleu), et on a tous les drapeaux possibles avec ces deux colonnes jaunes (resp. bleu) (donc on peut facilement en choisir N qui forment un ensemble diversifié).

Si $k = 1$ et qu'une colonne n'a aucun voisin, cela veut dire qu'une colonne est monochrome (toute jaune ou toute bleue). Dans ce cas, on réessaye d'appliquer le lemme de Hall dans le graphe correspondant à cette couleur : il n'y a alors pas de problème pour $k = 1$, car une deuxième colonne ne peut pas être monochrome.

Source du problème : https ://artofproblemsolving.com/community/c6h418686

Exercice 11 On considère un tableau à $n > 1$ lignes à $m > 1$ colonnes. On autorise les permutations suivantes des éléments de tableaux : celles qui conservent laissent chaque élément dans sa colonne ("mouvements verticaux"), et celles qui laissent chaque élément dans sa ligne ("mouvements horizontaux"). Trouver le plus petit entier k tel que toute permuations des mn éléments puisse être réalisé en au plus k mouvements.

Solution de l'exercice 11 3 mouvements suffisent, et 2 ne suffisent pas. En effet la permutation 12 //34 -> 13//24 ne peut pas être réalisée en 2 mouvements, car si le dernier mouvement est horizontal, 1 et 2 ne peuvent être sur la même colonne, et sinon 1 et 3 ne puevent être sur la même ligne.

De plus, un mouvement horizontal, puis vertical, puis horizontal suffisent. En effet, attribuons à chaque case le numéro de ligne dans laquelle il doit se trouver à la fin. Si en 2 mouvements, la ligne atteinte est la bonne, la dernière permutation au sein des lignes permettra d'atteindre la bonne permutation.

Pour atteindre la bonne bonne ligne, on va d'abord faire un mouvement sur les lignes dans le but d'assurer qu'un même numéro de ligne n'apparaisse pas deux fois sur la même colonne. On pourra alors permuter les colonnes pour placer chaque élément sur la bonne ligne.

Pour s'assurer qu'aucun numéro n'apparaisse pas deux fois sur la même colonne, le problème est le même que celui problème des 52 cartes : les piles de cartes sont alors les lignes.