Cachan Avril 2021
TD Constructions en combinatoire

25/04/2021

Quelques idées illustrées par les problème suivants :
- Algorithmes naïfs ou gloutons à analyser
- Améliorer un algorithme naif ou glouton
- Chercher des configurations régulières
- Procéder par récurrence

Echauffement

Exercice 1 On considère un grpahe dont le degré de chaque sommet est au plus Δ. Montrer que l'on peut colorer les sommets du graphe en au plus $\Delta + 1$ couleurs de sorte que deux sommets voisins soient toujours de couleurs différentes.

Exercice 2 On considère un certain nombre de pierres de masse comprise entre 0 et 1. On suppose que la somme de leurs masses vaut 9. On dispose également de mamions pouvant supporter une masse maximale de 3. Quel est le plus petit nombre de camions tels que l'on puisse à coup sûr pouvoir ranger toutes les pierres dans les camions ?

Exercice 3 Soit $n \geq 1$. Montrer qu'il est possible de parcourir tous les entiers de 0 à $2^n - 1$ de sorte qu'entre deux entiers consécutifs exactement un chiffre de leur écriture en base 2 change, sans repasser deux fois par le même entier.

Partie 1

Exercice 4 Soient n et k des entiers. Soient $E_1, \cdots E_k$ des parties de $\{1, \cdots, n\}$. Pour $1 \leq i \leq k$ on note $E_i^c = \{1, \cdots, n\} \setminus E_i$, le complémentaire de E_i.

Quel est le plus grand entier k tel qu'il soit toujours possible de choisir pour chaque i un ensemble entre E_i et E_i^c, de sorte que l'union des ensembles choisis soit égale à $\{1, \cdots, n\}$.

Exercice 5 Soit $A_1, \cdots, A_k$ des ensembles de $\{1, \cdots, n\}$ contenant chacun 3 éléments. Montrer que l'on peut colorier au moins $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ éléments de $\{1, \cdots, n\}$ de sorte qu'auncun des ensembles A_i ne soit entièrement coloré.

Exercice 6 Dans une grille $2 \times n$ sont écrits des réels positifs entre 0 et 1, de sorte que la somme de chacune des n colonnes soit égale à 1. Montrer que l'on peut choisir pour chaque colonne une des deux cases, de sorte que pour chacune des deux lignes, la somme des cases choisie dans la ligne soit égale au plus à $\frac{n+1}{4}$.

Exercice 7 Pour chaque entier n, la banque du Cap propose des pièces d'une valeur de $\frac{1}{n}$.

Etant donné un sac de telles pièces, d'une valeur totale de $99 + \frac{1}{2}$, montrer que l'on peut le partager en 100 sacs ayant chacun une valeur d'au plus 1.

Exercice 8 Dans le plan, n droites sont placées en position générale (pas deux sont parallèles, pas deux sont concourantes. Elles divisent le plan en régions. Une région est finie si elle ne contient aucune demi-droite.

Montrer qu'il est possible de colorer $c\sqrt(n)$ droites en bleu de sorte qu'aucune région finie n'ait le bord entièrement bleu, pour $c = 1$ (Montrer cela pour un c inférieur rapportera des points en fonction de c).

Partie 2

Exercice 9 Montrer qu'il existe un ensemble de 2021 entiers inférieurs à 200000 qui ne contient pas de progression arithmétique de longueur 3, c'est à dire que si x, y, z sont dans lensemble, et si $x + z = 2y$, alors $x = y = z$.

Exercice 10 Un ensemble E de points du plan est dit équilibré si pour tour $A, B \in E$, il existe $C \in E$ équidistant de A et B. Il est dit sans centre si pour tous A, B, C distincts il n'existe pas de point $D \in E$ équidistant de A, B et C.

(a) Montrer qu'il existe pour tour $n \geq 3$ un ensemble équilibré à n points.

(b) Pour quels $n \geq 3$ existe-t-il un ensemble équilibré et sans centre à n points ?

Exercice 11 Un mot de longeur n est dit sans répétition si il ne peut pas s'écrire $m_1m_2m_2m_3$ avec m_1, m_2, m_3 des mots éventuellement vides de tailles respectives a, b, c tels que $a+2b+c = n$. Montrer qu'il existe au moins 2^n tels mots.