Transformations géométriques, correction

April 25, 2021

1 Exercices

Translations

Exercise 1. .

1. Une rivière est délimitée par deux doites parallèles. Où placer un pont, perpendiculaire à la rivière, tel que cela minimise la distance entre deux villes I et J situées de chaque coté de la rivière.

2. Comment faire si plusieurs rivières séparent ces deux villes?

Solution 1. Pour un pont l'idée est la suivante, puisque le mouvement du pont est imposé on va "faire disparaitre" la rivière en la remplaçant par une ligne d'épaisseur nulle et déplacer tous les points de l'autre côté dans la direction et la largeur de la rivière. Maintenant minimiser la distance est facile, il suffit de tracer la ligne droite I et le nouveau point J. L'intersection entre cette droite et la ligne d'épaisseur nulle donne l'endroit où placer le pont.

Plus formellement le mouvement de I à J passe par le pont $\vec{OP} = \vec{u}$ le vecteur donnant la largeur de la rivière .

$$\vec{IO} + \vec{OP} + \vec{PJ} = \vec{IJ}$$

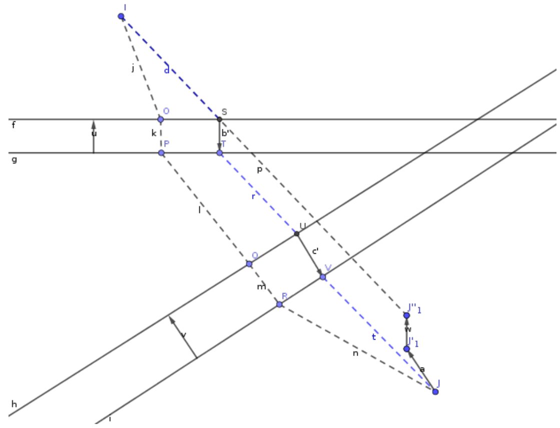
et il faut minimiser $IO + OP + PJ$ ou plus simplement juste $IO + PJ$ vu que la longueur du pont est toujours la même. Soit J' le point J translaté de $\vec{u}$. Puisque O est aussi le point P translaté par $\vec{u}$ alors $PJ = OJ'$ Il s'agit donc de minimiser $IO + OJ'$ mais la réponse est alors simple : il faut que O soit sur la droite (IJ).

Pour plusieurs rivière on procède de la même manière. On passe par les ponts $\vec{OP} = u$ et $\vec{QR} = \vec{v}$ avec le chemin

$$\vec{IO} + \vec{OP} + \vec{PQ} + \vec{QR} + \vec{RJ} = \vec{IJ}$$

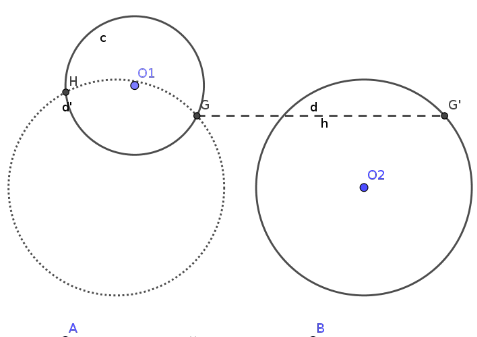
et on minimise $IO+OP+PQ+QR+RJ$ soit simplement $IO+PQ+RJ$ puisque les longueurs OP et QR sont toujours les largeurs des rivières. On translate le points P,Q,R, J selon le vecteur $\vec{u}$ que l'on note P',Q', R', J' et les points R' et J' par $\vec{v}$ que l'on note également R'' et J''. $P' = O$ (premier pont), $R'' = Q'$

(deuième pont). Donc $PQ = OQ'$ et $RJ = R'J' = R''J'' = Q'J''$. Donc il faut minimiser $IO + OQ' + Q'J''$, ce que l'on fait en plaçant O et Q' sur la droite (IJ'').



Exercise 2. Soient deux cercles S_1, S_2, une droite (l) et une distance $a > 0$. Construire un segment $[AB]$ tel que $A \in S_1$, $B \in S_2$, $(AB) \parallel (l)$ et $AB = a$.

Solution 2. Soit $\vec{u}$ le vecteur parallèle à (l) et de longueur a. On trace la translation du cercle S_2 par le vecteur $\vec{u}$, que l'on nomme S_2'. Il suffit alors de choisir G comme l'intersection entre S_2' et S_1 et G' comme le point initale de la translation de G sur S_2. On a alors bien $G' \in S_2$, $G \in S_1$ et $G'G = \vec{u}$ c'est à dire $G'G = a$ et $(G'G) \parallel (l)$.

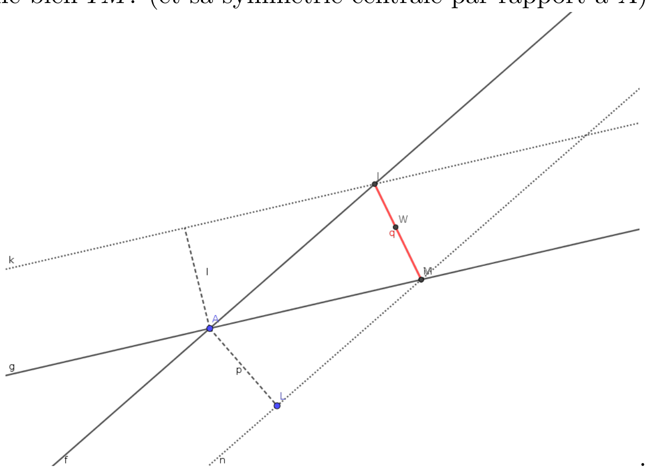


Exercise 3. Soit deux droites (l_1), (l_2) et une distance $a > 0$.

1. Trouver tous les points M tel que la somme des distances de M à (l_1) et de M à (l_2) soit égale à a.

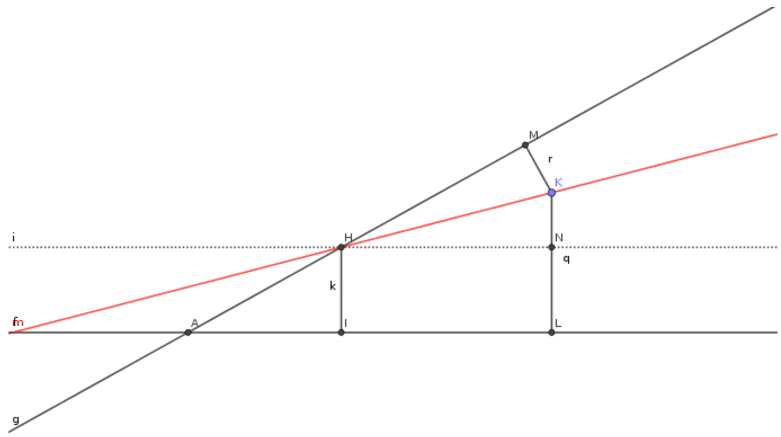
2. Trouver tous les points M tel que la différence des distances de M à (l_1) et de M à (l_2) soit égale à a.

Solution 3. 1-Traçons la droite (l_1') parrallèle à (l_1) à une distance égale à a (tout point appartenant à (l_1') est à une distance a de (l_1). Soit I l'intersection de (l_1') avec (l_2) alors la distance entre I et (l_2) est nulle celle entre I et (l_1) égale a. Donc on a trouver un premier point. On peut faire la même chose avec (l_2') la parrallèle à (l_2) à une distance a on trouve un deuxième point M. On va montrer que IM est la solution. On peut remarquer que les quatre droites parallèles forme un losange donc que IM est une bissectrice entre (l_1') et (l_2). Puisque (l_1') parrallèle à (l_1) pour tout point W entre ces deux droite on a : distance W à (l_1) + distance W à $(l_1') = a$. Conclusion la solution est l'ensemble des points W entre (l_1) et (l_1') tel que la distance W à (l_1') soit égale à la distance W à (l_2) c'est à dire la bissectrice de (l_1') et (l_2). La solution est donc bien IM. (et sa symmétrie centrale par rapport à A).



.

2-De même traçons la droite (l_1') parrallèle à (l_1) à une distance égale à a (tout point appartenant à (l_1') est à une distance a de (l_1). Soit H l'intersection de (l_1') avec (l_2) alors la distance entre I et (l_2) est nulle celle entre I et (l_1) égale a. Donc on a trouver un premier point. Puisque (l_1') parrallèle à (l_1) pour tout point K au dessus de (l_1') deux droite on a : distance K à (l_1) = distance K à $(l_1') + a$. Conclusion la solution est l'ensemble des points K au dessus de (l_1') tel que la distance K à (l_1') soit égale à la distance K à (l_2) c'est à dire la bissectrice de (l_1') et (l_2). (et sa symmétrie centrale par rapport à A).



.

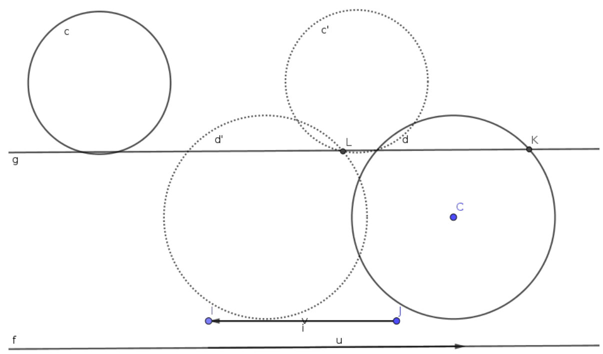
Exercise 4. Soit S_1 et S_2 deux cercles, (l_1) une droite, $a > 0$ une distance et A un point.

1. Tracer $(l) \parallel (l_1)$ telle que la longueur des cordes de S_1 et S_2 coupées par (l) soient égales.
2. Tracer $(l) \parallel (l_1)$ telle que la somme des longueurs des cordes de S_1 et S_2 coupées par (l) soit égale à a.
3. Tracer (l) passant par A telle que la longueur des cordes de S_1 et S_2 coupées par (l) soient égales.

Solution 4. Soit $(l) \parallel (l_1)$ l'astuce à observer ici est que si on translate S_1 ou S_2 parrallèlement à (l_1) alors la longueur de la corde coupée par (l) dans S_1 et S_2 ne change pas et ceci quelque soit la translation. On peut donc translater S_1 ou S_2 dans l'endroit qu'on préfère.

1- Il suffit ici de translater S_2 (nouveau cercle noté S_2') de tel sorte que la droite donnée par les centres $(O_2'O_1)$ soit perpendiculaire à (l_1). S_1 et S_2' s'intersectent en deux point M et N avec $(MN) \perp (O_2'O_1)$ donc $(MN) \parallel (l_1)$. Et évidemment puisque c'est la même corde MN, les cordes coupées par (MN) dans S_1 et S_2' ont la même longueur (et elle est égale à celle coupé par (MN) dans S_2).

2-Commeçons par translater S_2 selon un vecteur parallèle à (l) et de longueur a. Puis translatons S_1 parrallèlement à (l) de tel sorte à ce que le nouveau centre O_1' soit sur la médiatrice de O_2O_2' notée (m). S_1' coupe S_2' en L et S_2 en M. Puisque la figure formée par les trois cercles S_2, S_2', S_1' est symmétrique par rapport à (m) alors $LM \perp (m)$ donc $LM \parallel (l)$. On note K le deuxième point d'intersection de (LM) avec S_2. Alors $KL = a$ car L est l'image de la translation de K parallèlement à (l) et de longueur a. Finalement $a = KL = KM + ML$=longueur de la corde de S_2 coupé par (LM) + longueur de la corde de S_1 coupée par (LM) .



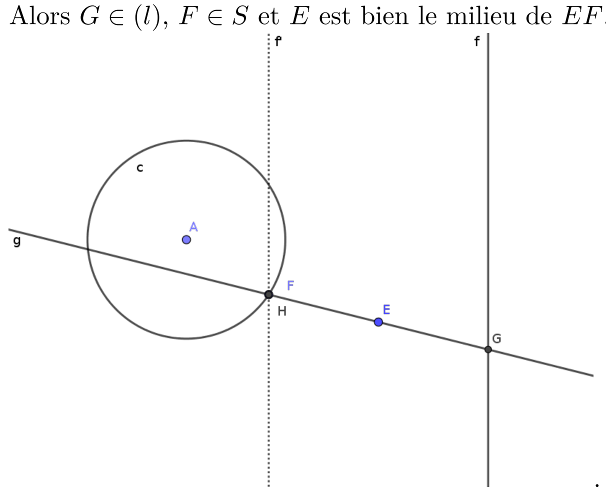
Exercise 5. Soit S un cercle, AB et CD deux cordes du cercle et $a > 0$ une distance. Soit X sur le cercle, (AX) et (BX) intersecte (CD) en E et F. Trouver X tel que $EF = a$.

Solution 5. .

Symmétries centrales

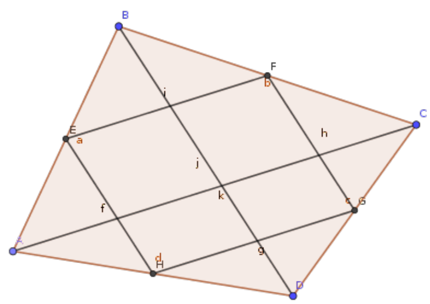
Exercise 6. Soit S un cercle, (l) une droite et E un point. Trouver $F \in S$, $G \in (l)$ tel que E soit le milieu de FG.

Solution 6. On trace (l') le symétrique de (l) par rapport au point E et on note F l'intersection de (l') avec S. Soit G le symétrique de F par rapport à E. Alors $G \in (l)$, $F \in S$ et E est bien le milieu de EF.



Exercise 7. Soit $ABCD$ un quadrilatère et M, N, P, Q les milieux de respectivement $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$. Montrer que M, N, P, Q est un parallèlogramme.

Solution 7. On utilise le théorème des milieux (Thales) pour tous les triangles ABC, BCD, CDA et DAB et on obtient que $(MN) \parallel (AC) \parallel (PQ)$ et $(NP) \parallel (BD) \parallel (QM)$. Donc $MNPQ$ est un parallèlogramme.



.

Exercise 8. Soit $M_1, \cdots, M_n$ des points du plan.

1. Si n est impaire, trouver un polygone à n côtés tel que $M_1, \cdots, M_n$ soient les milieux de ces côtés.

2. Traité le cas si n est paire.

Solution 8. .

Exercise 9. Soit S_1 et S_2 deux cercles s'intersectant en A et $a > 0$ une distance,

1. Trouver une droite (l) passant par A telle que les cordes dans S_1 et S_2 coupé par (l) soient de même longueurs. (même qu'un exercice précédemment mais plus simple)

2. Trouver une droite (l) passant par A telle que la différence des cordes dans S_1 et S_2 coupé par (l) soit égale à a.

Solution 9. .

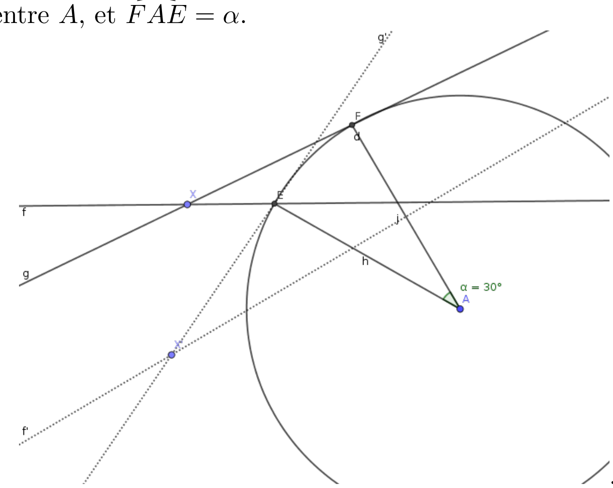
Exercise 10. Soit S un cercle, AB et CD deux cordes du cercle et J sur $[CD]$. Soit X sur le cercle, (AX) et (BX) intersecte (CD) en E et F. Trouver X tel que J soit le milieu de $[EF]$.

Solution 10. .

Rotations

Exercise 11. Soient deux droites (l_1) et (l_2), A un point et α un angle. Tracer un cercle autour de A tel que les points d'intersections B, C du cercle avec (l_1) et (l_2) forment un angle $\widehat{BAC} = \alpha$.

Solution 11. On trace la rotation d'angle α autour de A de la droite (l_1) (note (l_1')). Soit E l'intersection entre (l_2) et (l_1') puis F la rotation d'angle $-\alpha$ autour de A du point E. Alors $F \in (l_1)$, $E \in (l_2)$, E, F sont sur un même cercle de centre A, et $\widehat{FAE} = \alpha$.



Exercise 12. Soient trois droites parallèles (l_1), (l_2) et (l_3), Trouver $A \in (l_1)$, $B \in (l_2)$ et $C \in (l_3)$ tels que ABC soit un triangle équilatérale.

Exercise 13. Soient deux cercles S_1 et S_2, A un point et α un angle. Tracer deux droites (l_1) et (l_2) issues de A telles que (l_1) et (l_2) forment un angle α et coupent respectivement S_1 et S_2 en des cordes de longueurs égales.

Exercise 14. Soit ABC un triangle et A', B', C' trois points tels que $A'BC$, ACB' et ABC' soient des triangles équilatérales à l'extérieur de ABC. Montrer que les centres de ces triangles O_1, O_2, O_3 forment un triangle équilatérale.

Exercise 15. Soit $ABCD$ un quadrilatère (convexe). Soient $M_1, \cdots, M_4$ quatres points tel que $ABM_1, BCM_2, CDM_3, ADM_4$ sont des triangles équilatérales. Le première et troisième tourné vers l'extérieur du quadrilatère, le deuxième et de dernière vers l'intérieur. Montrer que M_1, M_2, M_3, M_4 forme un parallèlogramme.

Symmétries axiales

Exercise 16. Soient (d) une droite et A, B deux points situés du même coté de la droite.

1. Trouver $X \in (d)$ tel que l'angle entre (XA) et (d) soit égale à l'angle entre (XB) et (d).

2. Trouver $X \in (d)$ tel que l'angle entre (XA) et (d) soit égale à deux fois l'angle entre (XB) et (d).

Exercise 17. Soit $[AB]$ un segment, $h > 0$ une longueur et γ un angle. Construire un triangle de hauteur h dont la base est $[AB]$ et dont la différence des angles à la base est égale à γ.

Exercise 18. Construire un quadrilatère $ABCD$ dont les longueurs des cotés sont connus et tel que (AC) soit la bissectrice de $\widehat{BAD}$.

Exercise 19. Une table de billard est délimitée par n droites $(l_1), \cdots, (l_n)$ soient deux points A et B sur le billard.

1. À partir de A, dans quelle direction doit-on tirer une boule tel qu'elle rebondisse succésivement sur $(l_1), \cdots, (l_n)$ avant d'arriver sur B?

2. Dans le cas $n = 4$ avec un rectangle et $A = B$, montrer le chemin parcours par la boule est alors égale à la somme des diagonales du rectangle.

Exercise 20. Montrer que si un polygone à plusieurs axes de symmétries, ils se rencontent tous en un point.