Arithmétique

Théo Lenoir

Exercice 1 Trouver les entiers n positifs tels que $3^n + 5^n$ divise $3^{n+1} + 5^{n+1}$

Exercice 2 Trouver les couples (a, b) d'entiers tels que $a^2b - 1$ divise $a^2b^2 + 1$

Exercice 3 Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers strictement positifs tels que $\frac{a^3b-1}{a+1}$ et $\frac{b^3a+1}{b-1}$ sont tous deux des entiers.

Exercice 4 Trouver tous les triplets (p, q, r) de nombres premiers tels que les trois nombres suivants sont entiers :

$$\frac{p^2+2q}{q+r}, \frac{q^2+9r}{r+p}, \frac{r^2+3p}{p+q}$$

Exercice 5 A quelle condition sur $y \in \mathbb{N}$, $y^2 + 7y + 6$ est un carré ?

Exercice 6 A quelle condition sur $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, $(x + y)^2 + 3x + y + 1$ est un carré ?

Exercice 7 A quelle condition sur $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n a + b$ est un carré ?

Exercice 8 Soient m, n, a des entiers strictement positifs avec $a \geqslant 2$. Montrer que $\mathrm{PGCD}(a^n - 1, a^m - 1) = a^{\mathrm{PGCD}(m,n)} - 1$.

Exercice 9 Soit $n \geqslant 2$. Dénombrer le nombre de x dans $[\![1, n]\!]$ tels que $x^2 = x \pmod n$.

Exercice 10 Dénombrer le nombre de x dans $[\![1, n]\!]$ tels que $x^2 = 1 \bmod n$.

Exercice 11 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que n divise $4a^2 + 9b^2 - 1$.

Exercice 12 Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ il existe k entiers positifs consécutifs qui ne sont pas des puissances de nombre premiers.

Exercice 13 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_1 \dots a_n$ des entiers supérieurs ou égaux à 2 premiers entre eux deux à deux tels que $a_1 \dots a_n - 1$ soit le produit de deux entiers consécutifs.

Solution de l'exercice 1

Première solution :

Supposons que 3^n+5^n divise $3^{n+1}+5^{n+1}$. On pose $5^{n+1}+3^{n+1}=k(5^n+3^n)$avec $k>0$ entier.

On a $5^{n+1}+3^{n+1}<5\times 5^n+5\times 3^n=5(5^n+3^n)$ donc $k<5$.

Ainsi $k\leqslant 4$ et $5^{n+1}+3^{n+1}\leqslant 4(5^n+3^n)$ donc $5^n(5-4)\leqslant 3^n(4-3)$ donc $5^n\leqslant 3^n$. Or si $n\geqslant 1$, $5^n>3^n$ce qui est contradictoire. Il reste à vérifier si $n=0$ est solution ou pas : pour $n=0$ 2 divise bien 8 donc $n=0$ est la seule solution.

Deuxième solution :

Supposons que 3^n+5^n divise $3^{n+1}+5^{n+1}$.

$$3^{n+1}+5^{n+1}=3^{n+1}+5(5^n)=3'^{n+1}+5(5^n+3^n-3^n)=3^{n+1}+5(5^n+3^n)-5\times 3^n \tag{1}$$

Donc 3^n+5^ndivise $5\times 3^n-3^{n+1}=3^n(5-3)=2\times 3^n$. Montrons que 5^n+3^nest premier avec 3^n.

Pour cela, supposons que ce n'est pas le cas. Soit p un facteur premier des deux nombres. Comme p divise 3^n. Forcément par décomposition en facteurs premiers, $p=3$. Donc 3 divise 3^n+5^n.Pour $n=0$,ce n'est pas possible car 3 ne divise pas 2. Pour $n\geqslant 1$cela implique que 3 divise 5^nce qui esti mpossible par décomposition en facteurs premiers. Donc par l'absurde 5^n+3^nest premier avec 3^n.

Ainsi, par le lemme de Gauss, on en déduit que 5^n+3^ndivise 2. Or $5^n+3^n\geqslant 2$ avec égalité si et seulement si $n=0$. Donc la seule possibilité est $n=0$. Comme dans la première solution on vérifie que $n=0$ convient.

Solution de l'exercice 2

Supposons que a^2b-1 divise a^2b^2+1. On a que $a^2b^2+1=(a^2b)b+1=(a^2b-1+1)b+1=(a^2b-1)b+b+1$

Ainsi on obtient que a^2b-1 divise $b+1$

On peut avoir $b=-1$ou $b=0$ ou $a=0$ qui vérifient la divisibilité précédente.

Si ce n'est pas le cas, regardons ce qu'il se passe si $|a|\geqslant 2$.

On a $|a^2b-1|\geqslant|a^2b|-1\geqslant 4|b|-1$ et $|b+1|\leqslant|b|+1$.

Comme a^2b-1divise $b+1$ qui est non nul, on a $|a^2b-1|\leqslant|b+1|$ donc $4|b|-1\leqslant|b|+1$ donc $3|b|\leqslant 2$ ce qui est impossible.

Maintenant il reste à traiter le cas $a=\pm1$, dans ce cas, on a que $b-1$ divise $b+1$. Or $b+1=b-1+2$ donc $b-1$ divise 2 donc vaut ±1 ou ±2. On peut donc avoir $b=0,2,3,-1$.

Il reste donc à vérifier que les couples de la forme $(0,b),(a,0),(a,-1),(\pm1,2),(\pm1,3)$ sont solutions.

Si a ou b est nul, on a bien -1 divise 1 donc le couple (a,b) est bien solution.

Si $b=-1$, $a^2b-1=-(a^2+1)$ qui divise bien $a^2b^2+1=a^2+1$

Si $a=\pm1$ et $b=2$, on a $a^2b-1=1$ qui divise bien a^2b^2+1

Si $a=\pm1$ et $b=3$on a $a^2b-1=2$ et $a^2b^2+1=10$ donc (a,b) est solution.

Solution de l'exercice 3 Soit (a,b) un couple solution. Comme $a+1$ divise a^3b-1, on a $a^3b-1\equiv 0 \pmod{a+1}$. Or $a\equiv -1 \pmod{a+1}$, donc $(-1)^3b-1=-b-1\equiv 0 \pmod{a+1}$, donc $a+1$ divise $b+1$.

Comme $b-1$ divise b^3a+1 , on a $b^3a+1\equiv 0 \pmod{b-1}$. Or $b\equiv 1 \pmod{b-1}$, donc $b^3a+1\equiv a+1 \pmod{b-1}$, donc $b-1$ divise $a+1$, donc $b-1$ divise $b+1=(b-1)+2$. On obtient alors que $b-1$ divise 2. Or $b+1\geqslant 0$, donc $b-1=1$ ou 2, donc $b=2$ ou 3.

Si $b=2$, alors $a+1\geqslant 2$ et $a+1$ divise $b+1=3$, donc $a+1=3$, $a=2$. On a alors bien que $\frac{a^3b-1}{a+1}=\frac{16-1}{2+1}=5$ et $\frac{b^3a+1}{b-1}=17$ sont entiers. Ainsi $(a,b)=(2,2)$ convient.

Si $b=3$, alors $a+1\geqslant 2$ et $a+1$ divise $b+1=4$, donc $a+1=2$ ou 4, donc $a=1$ ou $a=3$. Si $a=1$, $\frac{a^3b-1}{a+1}=1$ et $\frac{b^3a+1}{b-1}=14$ sont entier, si $a=3$, $\frac{a^3b-1}{a+1}=20$ et $\frac{b^3a+1}{b-1}=41$ sont bien entiers.

Bilan les couples solutions sont $(1,3),(3,3)$ et $(2,2)$.

Solution de l'exercice 4 Ici il y a beaucoup trop de paramètres à gérer : on doit probablement pouvoir se ramener à un des nombres premiers fixés. La première piste est donc de regarder la parité.

Supposons p,q,r impairs, $q+r$ est pair et divise p^2+2q, donc p^2+2q est pair. Ainsi p^2 est pair donc p est pair contradiction. On a donc forcément un des trois nombres qui est pair, donc vaut 2.

— Si $p=2$, on a que $q+r$ divise $4+2q$: il existe k un entier strictement positif tel que $2q+4=k(q+r)$. Si $r\geqslant 3$, on ne peut pas avoir $k\geqslant 2$. En effet, sinon $2q+4\geqslant 2(q+3)$ ce qui est contradictoire. Dans ce cas, on a $k=1$ donc $r=q+4$.
  La deuxième fraction étant entière, on sait que $r+2=q+6$ divise $q^2+9(q+4)=(q+6)(q+3)-18$, donc $q+6$ divise 18. Or $q+6\geqslant 2+6=8$, donc $q+6=9$ ou 18. Ainsi $q=3$ ou $q=12$. Seul le premier cas est possible car q est premier, on a donc $r=3+4=7$. Le triplet $(2,3,7)$ peut être solution.
  Si $r=2$, $p+q=q+2$ divise $r^2+3p=4+6=10$. Or $q+2\geqslant 4$, donc $q+2=5$ ou 10, donc $q=3$ ou 8. Le second cas étant impossible, on trouve le triplet $(2,3,2)$.

- Si $q = 2$, $r + p$ divise $9r + 4$. Si $r = 2$, $p + 2$ divise $18 + 4 = 22$ et vaut au moins 4, donc on peut avoir $p + 2 = 22$ ou $p + 2 = 11$ ce qui donne $p = 20$ ou 9 qui ne sont pas premiers.
  On a donc r impair, si p est impair, $p + r$ est pair, donc $9r + 4$ aussi, donc r est pair contradiction. Ainsi p est pair, donc $p = 2$ on est ramené au cas précédent.
- Si $r = 2$, on a $p + q$ divise $4 + 3p$. Si $p = 2$ on est ramené au cas précédent : supposons donc p impair. Dans ce cas $4 + 3p$ est impair, donc $p + q$ aussi, donc q est pair : on a $q = 2$ ce qui nous ramène au cas précédent.

Il reste à vérifier les deux triplets trouvés :

- Pour $(p, q, r) = (2, 3, 2)$, $\frac{q^2+9r}{r+p} = \frac{27}{4}$ qui n'est pas entier.
- Pour $(p, q, r) = (2, 3, 7)$, $\frac{p^2+2q}{q+r} = \frac{10}{10} = 1$, $\frac{q^2+9r}{r+p} = \frac{9\times 8}{9} = 8$ et $\frac{r^2+3p}{p+q} = \frac{55}{5} = 11$

Ainsi $(2, 3, 7)$ est l'unique triplet solution.

Les exercices 5 à 13 sont dans le poly du stage d'été de Valbonne 2019 groupe C page 159