TN exotique
Stage POFM d'avril 2021

Fermat et Euler

Théorème 1 (***Théorème d'Euler***)

Si a et n sont premiers entre eux, alors $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$ où $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers entre 1 et n premiers avec n.

Corollaire 1 (***Petit théorème de Fermat***)

Si p est premier et ne divise pas a, alors $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

Exercice 1. Montrer que $n \mid \varphi(2^n - 1)$. Montrer que $2n \mid \varphi(9^n - 1)$.

Exercice 2. Montrer que si $n > 2$, alors $\varphi(n)$ est pair.

Exercice 3. Trouver tous les premiers p tels qu'il existe $x, y, z \geq 1$ tels que $x^p + y^p + z^p - x - y - z$ soit un produit d'exactement trois nombres premiers distincts.

Différences de puissances

Théorème 2

Pour tous n, a, b naturels, $a - b$ divise $a^n - b^n$. En particulier, si d divise n, alors $a^d - b^d$ divise $a^n - b^n$.

Exercice 4. Montrer que si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.

Exercice 5. Montrer que $n^3 - n$ est toujours divisible par 6. Montrer que $n^{13} - n$ est toujours divisible par 2730.

Exercice 6. Trouver tous les couples (a, b) tels que $2^b - 1$ divise $2^a + 1$.

Exercice 7. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $n^2 + n + 1$ divise $4^n + 2^n + 1$.

Exercice 8. Soit $F_n = 2^{2^n} + 1$ le n-ième nombre de Fermat. Montrer que F_a est premier avec F_b dès que $a \neq b$.

Exercice 9. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $n^2 + n + 1$ divise $4^n + 2^n + 1$.

Plus de problèmes

Théorème 3

Parfois, il n'y a pas besoin de théorèmes.

Exercice 10. Quelle est la taille maximale d'un ensemble $E \subset [\![1, 2021]\!]$ tel que pour tous $a, b \in E$ on ait $a - b \nmid a + b$?

Exercice 11. On dispose de trois boites. Déterminer tous les triplets (a, b, c) tels que si l'on place a jetons dans une boite, b jetons dans la deuxième, c dans la troisième, on puisse vider l'une des boites en itérant l'opération suivante : On choisit deux boites et on déplace entre elles des jetons de sorte que si elles contenaient avant u et v jetons avec $u \geq v$ alors elles contiennent après $u - v$ et $2v$ jetons.

Exercice 12. Soient $a, n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{a+1}\right)^n = \sqrt{b} + \sqrt{b+1}$$

Exercice 13. Les entiers plus petits que n est premier avec lui sont en progression arithmétique. Montrer que n est premier ou une puissance de 2.

Exercice 14. Trouver tous les $b_1, \ldots, b_6$ tels que $\{b_1, \ldots, b_6\} = \{a+1, \ldots, a+6\}$ et $b_1 b_2 + b_3 b_4 = b_5 b_6$.

Exercice 15. Montrer que pour tout $p \geq 3$ premier, p divise le numérateur de

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1}$$

Exercice 16. Peut-on arranger les naturels en une suite $a_1, a_2, \ldots$ de sort que pour tout $n \geq 1$ on ait $n \mid a_1 + \cdots + a_n$?