Sénior Avancé, TD d'algèbre.

April 21, 2021

Exercise 1. Trouver toutes les paires de réels (a, b) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a\lfloor nb \rfloor = b\lfloor na \rfloor$.

Exercise 2. Résoudre le système

$$\begin{aligned} x^2 + x - 1 &= y \\ y^2 + y - 1 &= z \\ z^2 + z - 1 &= x. \end{aligned}$$

Exercise 3. Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, le nombre $n!$ peut s'écrire comme une somme de n diviseurs différents de $n!$.

Exercise 4. Soit S un ensemble de nombres rationnels tel que

1. $\frac{1}{2} \in S$.
2. Si $x \in S$ alors $\frac{1}{x+1} \in S$ et $\frac{x}{x+1} \in S$.

Montrer que S contient tous les rationnels contenus dans $(0, 1)$.

Exercise 5. Soit $P(x)$ un polynome tel que $|P(x)| \leq 1$ pour $|x| \leq 1$.

1. Si $P(x) = ax^2 + bx + c$, trouver le maximum de $|a| + |b| + |c|$.
2. Si $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, trouver le maximum de $|a| + |b| + |c| + |d|$.

Exercise 6. Soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polynome réel. Si $P(x)$ à trois racine réels positives et $P(0) < 0$ montrer que $2b^3 + 9a^2d - 7abc \leq 0$.

Exercise 7. Soit une suite infinie décroissante de réels positifs $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $x_0 = 1$.

1. Montrer qu'il existe $n \geq 1$ tel que

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 3,999$$

2. Trouver une séquence tel que

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercise 8. Soit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tel que

$$|a_m - a_n + a_{m+n}| \leq \frac{1}{m+n}$$

pour tout $m, n \geq 1$. Montrer que (a_n) est une progression arithmétique.

Exercise 9. Soit P un polynome de degrés n.

1. Si $P(j) = \frac{j}{j+1}$ pour $j = 0, \cdots, n$. Trouver $P(m)$ pour $m > n$.
2. Si $P(j) = \binom{n+1}{j}^{-1}$ pour tout $j = 0, \cdots, n$. Trouver $P(n+1)$.

Exercise 10. Soit $P(x)$ un polynome réels tel que $P(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que tous tous les coefficients de $(1+x)^n P(x)$ soient positives.

.