"Cachan" groupe junior avancé

Antoine Derimay

20 Avril 2021

"Rappels"

Exercice 1 Trouver le dernier chiffre de 7777^{8888}.

Exercice 2 Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 3 Trouver les couples (x, y) d'entiers positifs tels que

$$x^2 - y^2 = 2222$$

Exercice 4 Trouver les couples (x, y) d'entiers positifs tels que

$$x^3 - y^3 = 12345$$

Exercice 5 Trouver les couples (x, y) d'entiers positifs tels que

$$3^x - 4^y = 1$$

Exercice 6 Soit p un nombre premier, quels sont les x tels que $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$?

Exos

Exercice 7 Trouver tous les entiers a, b tels que $a^3 + b^3 = 2^{2021}$

Exercice 8 Trouver tous les entiers positifs a, b, c tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 4567$.

Exercice 9 Trouver tous les entiers n, m tels que $2^n - 1 = 3^m$.

Exercice 10 Trouver tous les entiers n, m tels que $2^n + 1 = 3^m$.

Exercice 11 Trouver tous les entiers relatifs a tels que $a^2 + 6a + 1$ soit un carré parfait.

Exercice 12 Quels sont les entiers naturels x, y, z tels que $x^2 + y^2 = 7z^2$?

Exercice 13 Pour quels entiers positifs x, y, z a-t-on $x^2 + y^4 + 1 = 6^z$?

Exercice 14 (*) Trouver tous les entiers z, m, n tels que $z^2 = 2^m + 3^n$.

Exercice 15 (*) Trouver tous les entiers positifs m, n tels que $5^m - 3^n = 2$

Exos moins simples

Exercice 16 (P1 JBMO 2013)(*)
Trouver tous les couples (a, b) d'entiers positifs tels que $\dfrac{a^3b-1}{a+1}$ et $\dfrac{b^3a+1}{b-1}$ soient entiers.

Exercice 17 (P2 JBMO 2011)(**)
En cherchant d'abord une factorisation du membre de gauche, trouver tous les nombres premiers p tels qu'il existe x, y tels que $x(y^2-p)+y(x^2-p)=5p$.

Exercice 18 (**)
Trouver tous les entiers positifs m, n, p avec p premier tels que $p^m - n^3 = 27$.

Exercice 19 (**)
Quels sont les nombres premiers p, q tels qu'il existe r, s entiers tels que $|p^r - q^s| = 1$?

Exercice 20 (P4 JBMO 2012)(***)
Pour quels entiers strictement positifs a, b, c, d a-t-on

$$2^a \cdot 3^b + 5^c = 7^d \ ?$$

Exercice 21 (***)
Trouver tous les $p, q > 5$ premiers tels que $pq \mid (5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$.

Bonus

Exercice 22 Soit n un entier, montrer que $\sqrt{n}$ est ou entier, ou irrationnel.

Exercice 23 (quel modulo regarder ?)
Soit n un entier, et p un nombre premier tel que $p \equiv 1 \pmod{n}$.
Montrer que les puissances n-ièmes sont ou nulles ou des racines $\frac{p-1}{n}$-ièmes de l'unité modulo p, c'est-à-dire que si $a \equiv x^n \pmod{p}$, alors ou $a \equiv 0 \pmod{p}$, ou $a^{\frac{p-1}{n}} \equiv 1 \pmod{p}$.

Parce que p est premier, on peut montrer (ce n'est pas demandé ici) qu'il y a au plus d solutions modulo p de l'équation $x^d \equiv 1 \pmod{p}$.
Combien y a-t-il de puissances n-ièmes modulo p au maximum ?

Exercice 24 (quel modulo regarder ? 2)
Soit n un entier, montrer que $(x+ny)^n \equiv x^n \pmod{n^2}$. Combien peut-il y avoir de puissances n-ièmes modulo n^2 ?

Exercice 25 (Une somme de carrés)
Soit p un nombre premier impair.
On suppose qu'il existe a tel que $p \mid a^2+1$, montrer que $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$.

On suppose maintenant que $p \equiv 3 \pmod 4$, et que a, b sont tels que $p \mid a^2+b^2$. Montrer que a et b sont divisibles par p.

Application : trouver tous les a, b, n entiers tels que $a^2+b^2=11^n$.
Exercice 26 (Second degré) Avec a, b, c fixés et $a \neq 0$, on considère l'équation $ax^2+bx+c=0$. En posant $x = y - \frac{b}{2a}$ et en reconnaissant notre identité remarquable préférée, en déduire quelles sont les solutions de l'équation.

Application : Trouver tous les entiers x, y tels que $x^2+y^2=10xy$.

Dans cette formule, qu'on écrit sous la forme $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ on voit qu'il y a un terme dans une racine, qu'on appellera le discriminant $\Delta = b^2-4ac$. Remarquons que pour que les solutions de notre équation soient entières, il faut que le discriminant soit un carré parfait (voir l'exercice 22). Cela nous donne alors une autre équation diophantienne, qui peut être plus simple à résoudre que celle qu'on avait avant.

En revanche, il n'est pas rare que cette méthode n'aboutisse pas, ou que les calculs soient vraiment immondes. C'est pourquoi cette méthode doit être vue comme une roue de secours si on n'a pas d'autre idée, et pas quelque chose à utiliser dès qu'on voit des carrés.

Application : Quels entiers naturels m, n sont tels que $n(m^2-2m)+3n=m$?

Pour ceux qui voient pas trop comment faire

En général il y aura pas beaucoup de solutions, et un bon moyen de se ramener à un nombre fini de cas à tester (ou de montrer qu'il n'y a pas de solutions) est de regarder modulo n, avec n bien choisi.
Voici des conseils pour bien choisir les n :
De manière générale, l'un de ces modulos marchera (du plus fréquent au moins fréquent) : $4, 3, 8, 9, 5, 7 \ldots$
Si il y a des carrés, regarder modulo $4, 3, 8$.
Si il y a des cubes, regarder modulo 9 (et des fois 7, ou même 13) (voir les exercices 23 et 24 pour voir pourquoi)
Ca sert à rien de regarder modulo 6, vu que ça revient juste à regarder modulo 2 et 3 par le théorème des restes chinois, donc ne regarder que podulo des puissances de nombres premiers. Bien sûr, si il y a un 19 dans une équation, il peut être utile de regarder modulo 19, ce qu'il y a plus haut n'est pas universel.

Un autre truc important est de savoir bien factoriser, pour faire apparaître des relations de divisibilité ou autres.
La plus importante d'entre elles est $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, mais pensez aussi à $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ et $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$, (et des fois $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$).
Quand vous avez affaire à des puissances, l'étude de ces puissances pour un certain modulo peut donner des relations qui vont donner des factorisations intéressantes.
Par exemple $3^x - 4^y = 1$, regarder modulo 4 nous donne que pour $y \geqslant 1$, $3^x \equiv (-1)^x \equiv 1 \pmod 4$, donc x est pair. En réécrivant alors l'équation sous la forme $(3^{x'})^2 - 1 = (3^{x'} - 1)(3^{x'} + 1) = 4^x$, on obtient que $3^{x'} - 1$ et $3^{x'} + 1$ sont des puissances de 2, donc que ce sont 2 et 4 puisque leur différence vaut 2, et on a presque fini l'exercice !