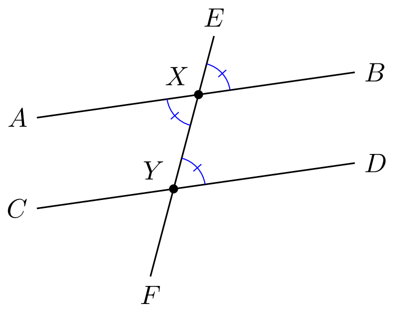
TD. Calcul d'angles dans certaines configurations usuelles

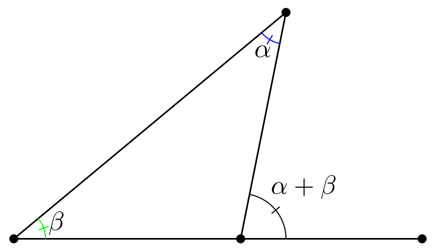
1 Quelques rappels sur la chasse aux angles

Angles alternes-internes et correspondants :

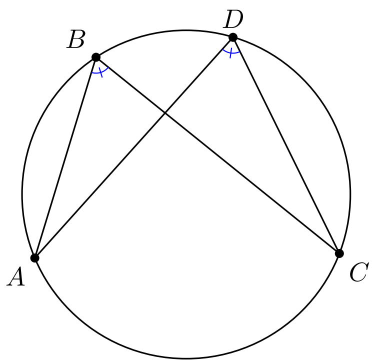
$$\begin{aligned}(AB) \parallel (CD) &\Leftrightarrow \widehat{AXY} = \widehat{DYX} \\ &\Leftrightarrow \widehat{BXE} = \widehat{DYX}\end{aligned}$$

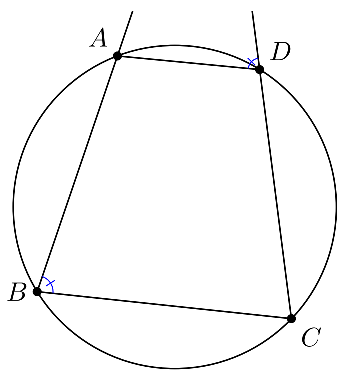
Somme des angles d'un triangle vaut $180°$**.**



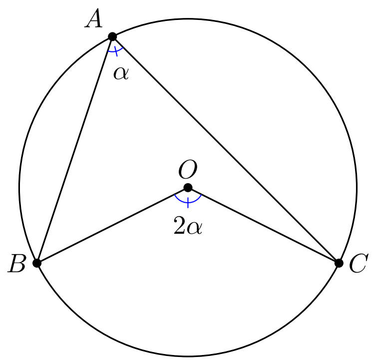


Points cocycliques : Si $ABCD$ est croisé, alors A, B, C, D cocyclique $\Leftrightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ADC}$.
Si $ABCD$ est convexe, alors A, B, C, D cocyclique $\Leftrightarrow \widehat{ABC} = 180° - \widehat{ADC}$.

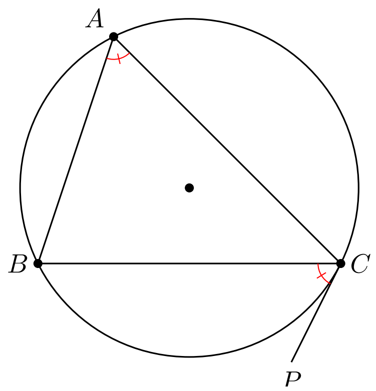




– Théorème de l'angle au centre

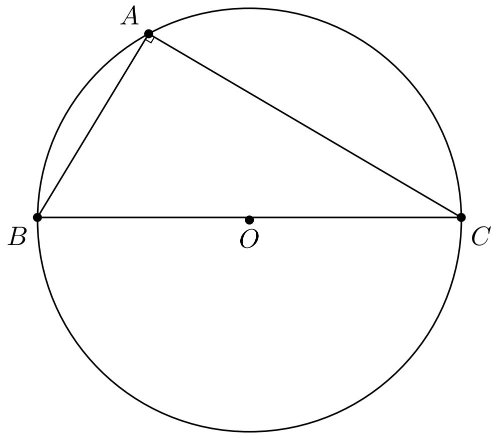


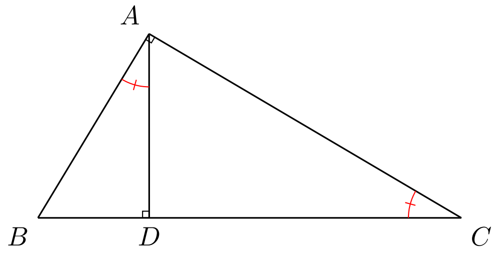
– L'angle à la tangente



ABC est rectangle en $A \quad \Leftrightarrow \quad [BC]$ est un diamètre du cercle circonscrit de ABC.

– relation récurrente





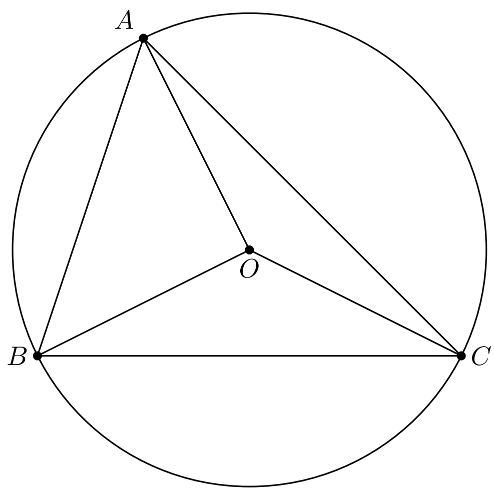
Conseils généraux :

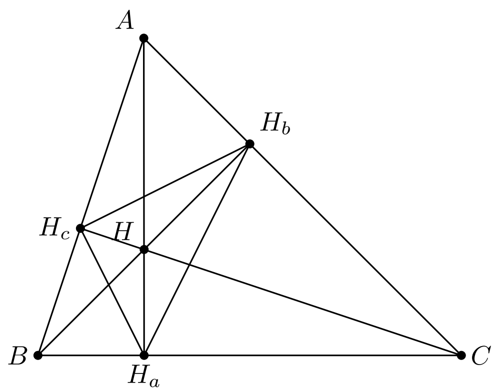
– Si on décide d'introduire des notations pour les angles, utiliser le moins de lettres possible. Souvent deux ou trois suffisent.
– On peut utiliser des couleurs pour marquer des angles égaux.
– Être aux aguets : Est-ce que je suis tombé sur des points cocycliques ? Un triangle isocèle ?...
– Vérifier si on a utilisé toutes les hypothèses.
– Faire plusieurs figures différentes. Ne pas hésiter à tout reprendre sur une figure propre si celle sur laquelle on travail est illisible.

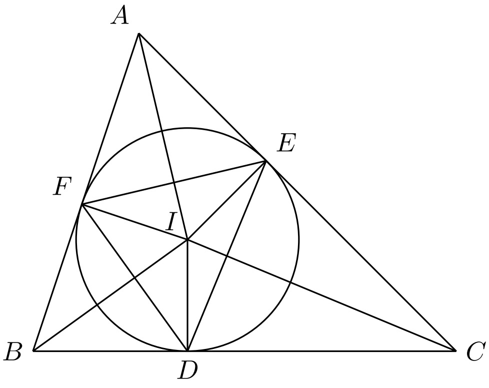
2 Exercices d'introduction

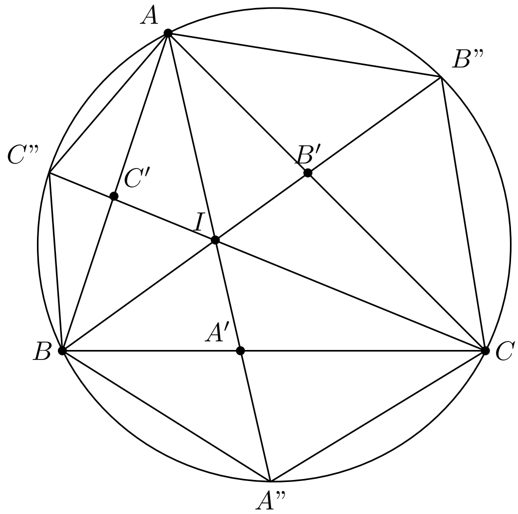
On note $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ACB} = \gamma$, $\widehat{CBA} = \beta$, et désigne par H, O et I l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit et le centre du cercle inscrit du triangle ABC respectivement.

Voici quelques configurations classiques. Exprimez tous les angles de ces figures en fonctions de α, β et γ.









3 TD

Exercice 1. Soit ω le cercle circonscrit du triangle ABC et t la tangente à ω en C. La droite p, parallèle à cette tangente, coupe les droites (BC) et (AC) aux points D et E respectivement. Prouvez que les points A, B, D, E appartiennent au même cercle.

Exercice 2. Soit ABC un triangle rectangle en C. Soient D le pied de la hauteur issue de C, et Z le point de $[AB]$ tel que $AC = AZ$. La bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe (CB) et (CZ) en X et en Y respectivement. Montrer que les quatre points B, X, Y, D sont sur un même cercle.

Exercice 3. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe, et l_a,l_b, l_c, l_d les bissectrices extérieures de $\widehat{DAB}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$, $\widehat{CDA}$ respectivement. (On rappelle qu'une bissectrice est une droite). Puis, on note P, Q, R, S les intersections de l_a et l_b, de l_b et l_c, de l_c et l_d et de l_d et l_a. Montrer que $PQRS$ est cyclique.

Exercice 4. Soit ABC un triangle acutangle tel que $AB > AC$. O est le centre de son cercle circonscrit et D est le milieu de $[BC]$. La perpendiculaire l à (AB) passant par D coupe (AB) en E. Si la droite (AO) coupe l en Z, montrer que A, Z, D, C sont cocycliques.

Exercice 5.
Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit ω. On note D, E, F les points de tangence de ω avec $[BC], [CA], [AB]$ respectivement. On note K la deuxième intersection de (BI) avec le cercle de diamètre $[BC]$. Montrer que E, F et K sont alignés.

Exercice 6. Soit O le centre du cercle circonscrit d'un triangle aigu ABC avec $|AB| < |BC|$, et D, E les milieux de $[AB]$ et de $[AC]$ respectivement. La droite (OE) coupe (BC) en K, le cercle circonscrit de OKB coupe (OD) une deuxième fois en L. F est la projection orthogonale de A sur (KL). Montrer que le point F se trouve sur la droite (DE).

Exercice 7. Soit ABC un triangle dont le centre du cercle circonscrit est O. Les points D, E, F se situent à l'intérieur des côtés $[BC], [CA], [AB]$ respectivement, de sorte que (DE) est perpendiculaire à (CO) et (DF) est perpendiculaire à (BO). Soit K le centre du cercle circonscrit de AFE. Montrer que DK et (BC) sont perpendiculaires.

Exercice 8. Soit $ABCD$ un trapèze avec $AB > CD$ et $(AB) \parallel (CD)$. On suppose que le trapèze possède un cercle inscrit de centre I. Le cercle inscrit au triangle ABC est tangent à la droite (AB) en M et à (AC) en N. Montrer que le point I appartient à la droite (MN).

Exercice 9. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe avec $\widehat{DAB} = \widehat{BCD} = 90°$ et $\widehat{ABC} > \widehat{CDA}$. Soient respectivement Q et R des points sur les segments $[BC]$ et $[CD]$, de sorte que la droite (QR) coupe les droites (AB) et (AD) aux points P et S, respectivement. Il est donné que $PQ = RS$. Soit M le milieu de $[BD]$ et N le milieu de $[QR]$. Prouver que les points M, N, A et C se trouvent sur un même cercle.

Exercice 10. Soit ABC un triangle et soit ω son cercle circonscrit. Soit l_B et l_C deux droites parallèles passant respectivement par B et C. Les droites l_B et l_C coupent ω pour la deuxième fois aux points D et E respectivement, avec D appartenant à l'arc AB, et E sur l'arc AC. Supposons que (DA) coupe l_C en F, et (EA) coupe l_B en G. Si O, O_1 et O_2 sont respectivement les centres des cercles circonscrits des triangles ABC, ADG et AEF, et P est le centre du cercle circonscrit du triangle OO_1O_2, prouver que OP est parallèle à l_B et l_C.

4 Limites de la méthode

Attention ! Calculer les angles dans une figure est souvent une bonne méthode pour commencer, mais il faut l'appliquer avec sagesse ! Il est crucial de reconnaître quand une chasse aux angles “tourne en rond“ et on a besoin d'introduire une nouvelle information.

Pour débloquer la situation ou contourner le problème, on peut essayer de :
– regarder si vous n'avez pas manqué des points cocycliques ;
– faire des conjectures !
– introduire de nouveaux points ;
– faire entrer les longueurs en jeux : triangles semblables, Thalès, puissances de points...
– se souvenir de configurations classiques, comme par exemple le pôle sud (très récurrent) ;
– éventuellement penser aux transformations.

Exercice 11. Soit ABC un triangle. Son cercle inscrit a pour centre I et est tangents aux côtés $(BC), (AC), (AB)$ en D, E, F respectivement. La droite (AI) intersecte (DE) et (DF) en P et Q. Montrer que le centre du cercle circonscrit de DPQ est le milieu de $[BC]$.

Exercice 12. Soit ABC un triangle acutangle. Les droites l_1 et l_2 sont perpendiculaires à (AB) en les points A et B respectivement. Les perpendiculaires aux droites (AC) and (BC) issues du milieu M de $[AB]$ intersectent l_1 and l_2 en E et F respectivement. Si D est l'intersection des droites (EF) et (MC). Montrer que $\widehat{ADB} = \widehat{EMF}$.

Exercice 13. Soit ABC in triangle acutangle, I le centre de son cercle inscrit, I_a le centre de son cercle A-exinscrit, et O le centre de son cercle circonscrit. On définit A' comme le symétrique de A par rapport à BC. Montrer que $\widehat{IOI_a}$ et $\widehat{IA'I_a}$ sont égaux.