JBMO Jeux

Théo Lenoir

Exercice 1 Alice et Bob jouent au jeu suivant : n pièces sont posés sur une pile, et chacun leur tour, commençant par Alice, s'il y a k pièces peut enlever un nombre de pièces premier avec k de la pile. Pour quels n Alice peut gagner à coup sur ?

Exercice 2 Alice et Bob jouent au jeu suivant : n sommets sont dessinés au tableau, k arêtes sont placés par Bob de sorte que deux sommets soient reliés au plus une fois, et aucun sommet n'est relié à lui-même. Bob choisit ensuite deux sommets A et B et place un jeton sur A. Ensuite, alternativement, Alice déplace le jeton sur une case reliée à A et Bob peut supprimer une arête du graphe. Ils jouent jusqu'au moment où Alice ne peut plus bouger le jeton, Alice gagne si à un moment dans la partie elle a pu poser son jeton sur le sommet B. Quelle est la valeur de k maximale pour laquelle Bob gagne ?

Exercice 3 Alice et Bob jouent à un jeu : il y a deux piles de 2017 et 2000 jetons. Chacun son tour, le joueur dont c'est le tour choisit une pile contenant au moins 2 jetons, lui enlève t jetons avec $2 \leqslant t \leqslant 4$ et ajoute 1 jeton à l'autre pile. Alice et Bob jouent de manière optimale, la première personne qui ne peut pas jouer perd. Alice commence, qui gagne ?

Exercice 4 Alice et Bob jouent au jeu suivant : les nombres de 2020 à 1 sont écrits dans l'ordre décroissant au tableau de gauche à droite au tableau. Alice dispose d'un nombre a, Bob d'un nombre b et chacun leur tour, commençant par Alice, ils ont le droit d'effacer a nombres écrits (b pour Bob) et de les réécrire dans l'ordre de leur choix. Supposons $a = 1000$. Bob gagne si après un certain nombre de coups, il arrive à écrire les nombres de 1 à 2020 dans l'ordre. Est-ce que Bob gagne si $b = 1000$? $b = 1001$? $b = 1002$?

Exercice 5 Alice et Bob jouent au jeu suivant : les nombres de 1 à 100 sont écrits au tableau et k est un entier fixé strictement positif. Alice efface k nombres, et Bob en entoure k. Bob gagne si la somme des k nombres vaut 100, sinon Alice gagne. Qui gagne si $k = 9$? $k = 8$?

Exercice 6 Soit n un entier strictement positif, Alice et Bob jouent au jeu suivant : au début, une pile de n pièces est présente, et chacun leur tour, commençant par Alice, ils ont le droit de séparer en deux piles une pile de k pièces avec $k \geqslant 2$. Déterminer qui a une stratégie gagnante selon la valeur de n.

Exercice 7 Alice et Bob jouent au jeu suivant : Alice choisit un entier $1 < a < 10$ et Bob un entier b différent de a tel que $1 < b < 10$. 330 pièces sont présentes, et chacun leur tour, commençant par Alice, enlève 1, a ou b pièces de la pile. Celui qui prend la dernière pièce gagne, qui a une stratégie gagnante ?

Exercice 8 Alice et Bob jouent au jeu suivant : Alice choisit un ensemble de la forme $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ pour un entier n vérifiant $n \geqslant 2$. Bob commence par choisir un nombre quelconque parmi les éléments de A. Ensuite, en commençant par Alice, ils choisissent chacun à leur tour un nombre distinct de tous les nombres déjà choisis et dont l'écart avec un des nombres déjà choisis vaut 1. Le jeu s'arrête quand tous les nombres de A ont été choisis.

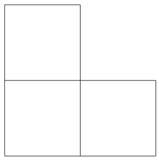
Alice gagne si la somme des nombres qu'elle a choisis est un nombre composé, sinon Bob gagne. Déterminer qui, parmi Alice et Bob, a une stratégie gagnante.

Exercice 9 Anatole et Bob jouent au jeu suivant. Initialement, un entier n est écrit sur une feuille de papier. Puis, chacun à son tour, et en commençant par Anatole, les joueurs remplacent l'entier n par un des nombres $kn/100$, où k est un entier compris entre 1 et 99 inclus. Le premier joueur à écrire un nombre qui n'est pas entier perd, et son adversaire gagne.

Anatole et Bob sont deux joueurs redoutables, et jouent donc de manière optimale. Pour combien de valeurs de n entre 1 et 2019 Bob gagne ?

Exercice 10 Soit $n \in \mathbb{N}$. Alice et Bob jouent à un jeu : ils dessinent une grille de taille 8×8 (donc avec 64 cases). Alice colorie n cases de la grille en rouge. Bob colorie ensuite 4 colonnes entières et 4 lignes entières en noir. A la fin, s'il reste une case rouge, Alice gagne. Alice et Bob jouent de manière optimale. Déterminer le plus petit n tel que Alice gagne.

Exercice 11 Une forme L est une des quatre rotations de la forme suivante :



Une grille 5×5 est divisée en 25 petites cases blanches. Soit $1 \leqslant k \leqslant 25$ un entier, Alice et Bob jouent au jeu suivant : chacun son tour, commençant par Alice, Alice et Bob noircissent une case de la grille (qui n'a pas déjà été noircie) jusqu'à que k cases soient noircies. On dit qu'un placement de formes L est bon si aucune des formes posées n'en recouvre une autre, si aucune case noircie est recouverte et s'il y a strictement moins de 3 cases blanches non recouvertes. S'il existe un bon placement Alice gagne. Sinon Bob gagne. Alice et Bob jouent de manière optimale. Quel est le plus petit k tel que Bob gagne ?

Exercice 12 Soit $n \geqslant 1$ un entier strictement positif. Alice et Bob jouent au jeu suivant : au départ il y a une pile de s pièces, avec s un entier strictement positif. Alice commence. Chacun son tour, Alice et Bob enlèvent un certain nombre $k > 0$ de pièces tel que : $k = 1$ ou k est premier ou k est un multiple de n. Le gagnant est celui qui prend la dernière pierre. Alice et Bob jouent de manière optimale. Pour combien de valeurs de s Bob gagne-t-il ?

Exercice 13 Soit $n \geqslant 1$ un entier strictement positif. Alice et Bob jouent au jeu suivant : Alice choisit n réels, pas nécessairement 2 à 2 distincts et écrit au tableau les $\frac{n(n-1)}{2}$ sommes formées en sommant chaque paire de nombre possibles. Bob gagne s'il peut deviner correctement en un seul essaie les n réels choisis par Alice. Est-ce que Bob peut gagner à tous les coups dans les cas suivants :

— Pour $n = 5$?
— Pour $n = 6$?
— Pour $n = 8$?

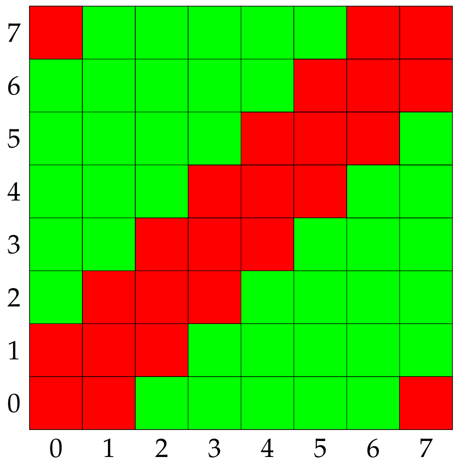
Par exemple pour $n = 4$ $1, 5, 7, 9$ et $2, 4, 6, 10$ donnent les mêmes sommes $6, 8, 10, 12, 14, 16$ donc Bob ne peut pas gagner si Alice choisit $1, 5, 7, 9$.

Exercice 14 Antoine et Théo jouent au jeu suivant : il y a deux piles de pièce, chacun son tour, en commençant par Antoine, chaque joueur a le droit d'enlever un jeton de chaque pile, ou d'enlever au moins un jeton d'une pile. Le joueur qui ne peut plus enlever de jetons a perdu. Si Antoine et Théo jouent de façon optimale, et que les deux piles initialement contiennent 2010 pièces, qui gagne ?

Quelques corrigés en vrac (envoyez moi un mail si vous voulez que je rajoute un corrigé pour un exo !)

Pour l'exercice 3 :

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> La première chose à se dire c'est que 2000 et 2017 sont des nombres mis au hasard, on va donc regarder le problème pour deux piles de m et n jetons. On va donc procéder par position gagnante/perdante et essayer d'en déduire quelque chose. $(0,0)$, $(1,0)$; $(0,1)$ et $(1,1)$ sont clairement perdants. Notons aussi que le jeu est symétrique en (m,n). On va colorier en rouge les positions perdantes, en vert les positions gagnantes.



Chaque mouvement possible s'interprète comme un mouvement sur le tableau : on peut passer de la position (m,n) à $(m-t,n+1)$ donc on peut avoir $(-2,1)$, $(-3,1)$ et $(-4,1)$ comme mouvements, et $(1,-2)$, $(1,-3)$ et $(1,-4)$. A partir de $(2,1)$, le seul mouvement possible est $(-2,1)$ qui emmène à $(0,2)$ qui est gagnant, donc $(2,1)$ est perdante. Comme $(0,1)$ et $(1,1)$ et $(2,1)$ sont perdantes, $(2,0),(3,0),(4,0),(5,0),(6,0)$ sont gagnantes. A partir de $(2,2)$ le seul mouvement possible à symétrie près est $(-2,1)$ qui emmène à $(0,3)$ gagnant, à partir de $(3,2)$ les seuls mouvements possibles emmènent à $(4,0)$, $(1,3)$ ou $(0,3)$ qui sont toutes gagnantes, donc $(2,2)$ et $(2,3)$ sont perdantes. On en déduit comme $(2,1)$ est aussi perdantes que $(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)$ et $(1,7)$ sont perdantes. On itère le raisonnement et on obtient la grille ci-dessus.

Il semble en prolongeant (on peut faire tous les cas $m,n \leqslant 10$) que Alice perd si et seulement si $m-n \equiv 0,\pm 1 \pmod 8$. Notons que cette condition est symétrique ce qui est cohérent avec la symétrie en (m,n). On va donc prouver cela !

Notons que si on est en (k,l) tous les mouvements font diminuer strictement $k+l$ (car $-2+1$, $-3+1$ et $-4+1$ sont strictement négatifs). On va donc prouver le résultat par récurrence forte sur $m+n$. L'initialisation si $k+l=0$ est évidente car dans ce cas $m=n=0$, $m-n=0$ et la position est clairement perdante. Pour $m+n=1$, on a $(m,n)=(0,1)$ ou $(1,0)$ deux positions perdantes, et $m-n\equiv \pm 1 \pmod 8$. Pour $m+n=2$, on a $(1,1)$ qui est perdante et dans ce cas $m+n=0$, et $(2,0)$ et $(0,2)$ qui sont gagnantes et dans ce cas $m-n\equiv \pm 2$.

On a donc prouvé le résultat pour $m+n=0,1,2$. Soit $N \geqslant 2$, on suppose que le résultat est vrai si $m+n \leqslant N$, supposons $m+n=N+1$. Comme $N+1\geqslant 3$, m ou n vaut au moins 2 il est possible de faire un mouvement. Notons (m',n') la situation après le coup d'Alice (rappelons qu'on a déjà justifié $m'+n' \leqslant m+n-1$). Deux cas se présentent à nous :

— Si $m-n\equiv 0,\pm 1 \pmod 8$, notons que les mouvements possibles ($(-2,1),(-3,1),(-4,1)$ et symétriques) permettent d'ajouter $\pm 3, \pm 4, \pm 5$ modulo 8 à $m+n$, donc d'ajouter $3,4,5$ (car $-4\equiv 4$ et $-5\equiv 3$) à $m-n$ modulo 8. En regardant chaque cas, on obtient que $m'-n' \equiv 2,3,4,5,6$ et comme $m'+n' \leqslant m+n-1 \leqslant N$ donc la position obtenue est gagnante. On en déduit donc que (m,n) est perdante.

— Si $m-n \equiv 2,3,4,5,6 \pmod 8$, comme $n-m$ vérifie aussi cela, on peut supposer $m\geqslant 2$. Si $m-n\equiv 2,3,4$ on enlève 2 pièces à m, on obtient alors $m'-n'\equiv -1,0,1 \pmod 8$. Si $m-n\equiv 5,6$, si $m\geqslant 4$ on enlève 4 pièces à m, on obtient ensuite $m'-n'\equiv 0,1 \pmod 8$. En particulier dans chacun des cas on s'est ramené dans une situation avec $m'+n'$ strictement inférieur et perdante d'après l'hypothèse de récurrence, donc (m,n) est gagnante. Si $n\geqslant 2$ on peut enlever 2 pièces à n et ajouter une à m, on obtient alors $m'-n'\equiv m-n+3 \equiv -1,0$ et donc amener Bob également à une stratégie perdante.

  Reste donc le cas ou $m-n\equiv 5,6$ et $m\leqslant 4$, $n \leqslant 1$. Ainsi $n=0$ ou 1 et $m\equiv 5,6,7$ modulo 8 ce qui est impossible.

  Dans tous les cas, Alice peut amener Bob dans une position perdante et donc gagner.

En particulier, dans le cas donné $m-n=17\equiv 1 \pmod 8$ donc Bob gagne !