JBMO Bidouillage

Théo Lenoir

1 Viète et cie

Exercice 1 Déterminer tous les triplets de réels (a, b, c) qui vérifient le système d'équations suivant :

$$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \text{ et } a^2+b^2+c^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Exercice 2 Soit a, b, c trois réels distincts et x, y deux réels tels que $a^3+ax+y=0$, $b^3+bx+y=0$, $c^3+cx+y=0$. Montrer que $a+b+c=0$.

Exercice 3 Soit a, b, c, d quatre réels tels que :

$$abc-d=1, \quad bcd-a=2, \quad cda-b=3, \quad dab-c=-6.$$

Montrer que $a+b+c+d \neq 0$

Exercice 4 Déterminer tous les triplets (x, y, z) de réels non nuls tels que $\begin{cases} x+y+z=2008 \\ x^2+y^2+z^2=6024^2 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2008} \end{cases}$

Exercice 5 Soit $c>0$, a, b deux réels distincts tels que $a^4-2019a=b^4-2019b=c$. Montrer que $-\sqrt{c}<ab<0$.

Exercice 6 Soit a, b deux entiers tels que le polynôme x^2+ax+b a un discriminant qui est le carré d'un entier. Montrer que le polynôme admet deux racines entières.

Exercice 7 Soit a et b deux nombres réels tels que $a^3+b^3=6ab-11$. Démontrer que

$$-7/3<a+b<-2.$$

2 Bidouillage

Exercice 1 Soit $k>1$ et $n>2018$ deux entiers avec n impair. On suppose qu'il existe $x_1, \ldots, x_n$ des nombres rationnels non nuls et non tous égaux tels que

$$x_1+\frac{k}{x_2}=x_2+\frac{k}{x_3}=x_3+\frac{k}{x_4}=\ldots=x_{n-1}+\frac{k}{x_n}=x_n+\frac{k}{x_1}$$

— Déterminer les valeurs possibles de $x_1 \ldots x_n$ en fonction de k et n.
— La plus petite valeur de k pour laquelle il existe un tel n et de tels $x_1, \ldots, x_n$

Exercice 2 On dit que A est un ensemble parfait si :
— Tout élément de A est un entier strictement positif
— Si $n \in A$, $n \leqslant 2018$
— Si $S \subset A$ est de cardinal 3, il existe n, m dans S tels que $|m-n| \geqslant \sqrt{m}+\sqrt{n}$.
Déterminer le cardinal maximal d'un ensemble parfait.

Exercice 3 Déterminer tous les couples (m, n) d'entiers strictement positifs tels que $\sqrt{n+\sqrt{2016}}+\sqrt{m-\sqrt{2016}} \in \mathbb{Q}$

Exercice 4 Déterminer les triplets de réels (x, y, z) non nuls tels que $x^3=\frac{z}{y}-\frac{2y}{z}$, $y^3=\frac{x}{z}-\frac{2z}{x}$ et $z^3=\frac{y}{x}-\frac{2x}{y}$.

Exercice 5 Soit (x, y) un couple de réels strictement positifs tels que

$$x^3 + y^3 + (x+y)^3 + 30xy = 2000.$$

Montrer que $x + y = 10$

Exercice 6 Soit x un réel tel que $x^3 - 3\sqrt{3}x^2 + 9x - 3\sqrt{3} - 64 = 0$. Déterminer la valeur de $x^6 - 8x^5 + 13x^4 - 5x^3 + 49x^2 - 137x + 2015$.

Exercice 7 Prouver que $\underbrace{111\dots11}_{1997}\underbrace{22\dots22}_{1998}5$ est un carré parfait.

3 Inégalités basiques

Exercice 1 Soit a, b, c, d, e, f, g, h des réels positifs de somme 8, avec $a, b, c, d \leqslant 1$ et $e, f, g, h \geqslant 1$. Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 \leqslant 28$

Exercice 2 Trouver la valeur maximale de xyz lorsque x, y, z sont des réels tels que $x \geqslant 20$, $y \geqslant 40$, $z \geqslant 1675$ et $x + y + z = 2015$.

Exercice 3 Soit $n \geqslant 3$, et $x_1, \dots, x_n$ des réels vérifiant $\sum_{k=1}^{n-1} \min(x_k; x_{k+1}) = \min(x_1; x_n)$. Montrer que $\sum_{k=2}^{n-1} x_k \geqslant 0$

Exercice 4 Soit x, y, z des réels strictement positifs tels que $x \leqslant 2$, $y \leqslant 3$ et $x+y+z \leqslant 11$. Montrer que $xyz \leqslant 36$.