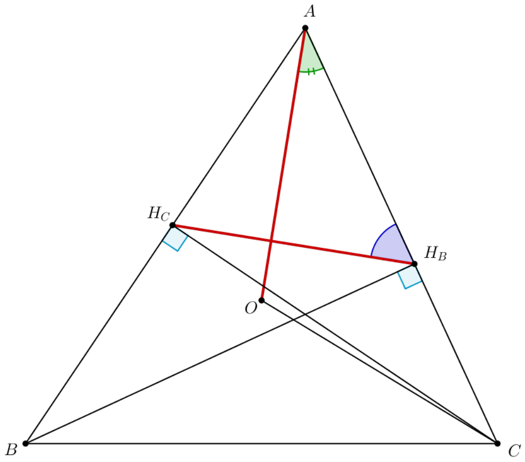
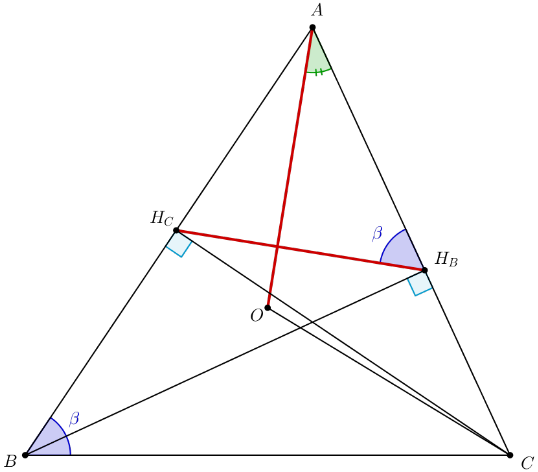
3. Séance d'exercices sur gather.town

Exercice 1

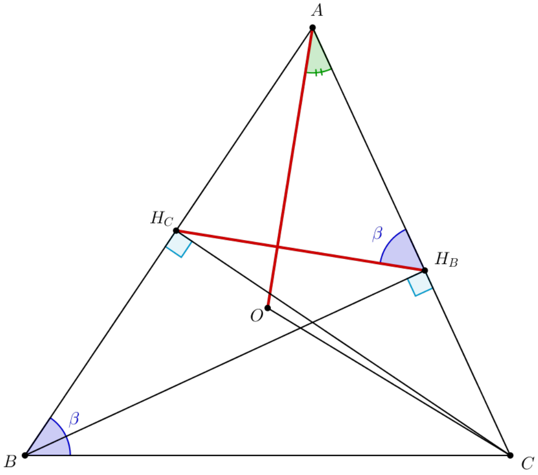


On veut montrer que la somme de l'angle bleu et de l'angle vert vaut 90

Exercice 1

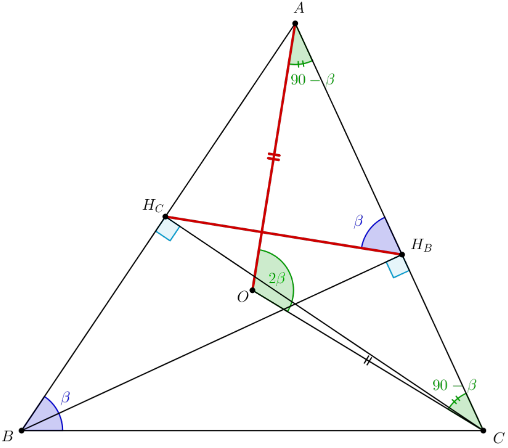


Exercice 1

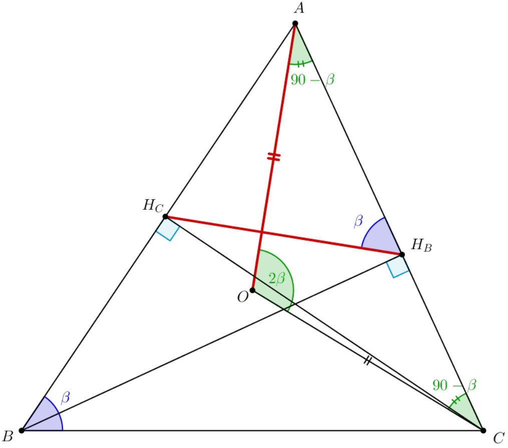


Par cocyclicité de B, H_C, H_B et C, on a $\widehat{H_C H_B A} = \widehat{CBH_C} = \beta$

Exercice 1

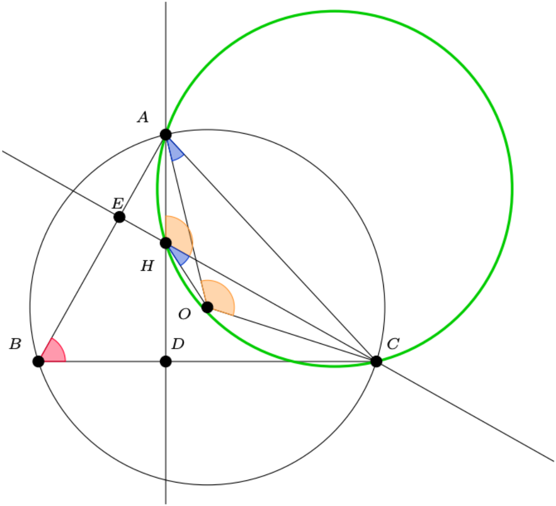


Exercice 1



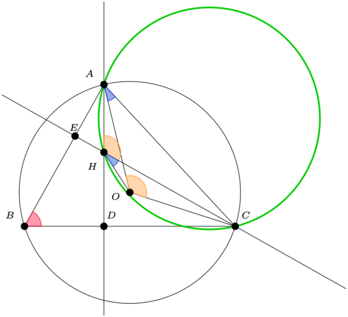
O est le conjugué isogonal de H donc $\widehat{CAO} = \widehat{BAH} = 90 - \beta$

Exercice 2



L'angle bleu est de mesure 30°, les angles orange sont de mesure 120°, les angles rouges de mesure 60°.

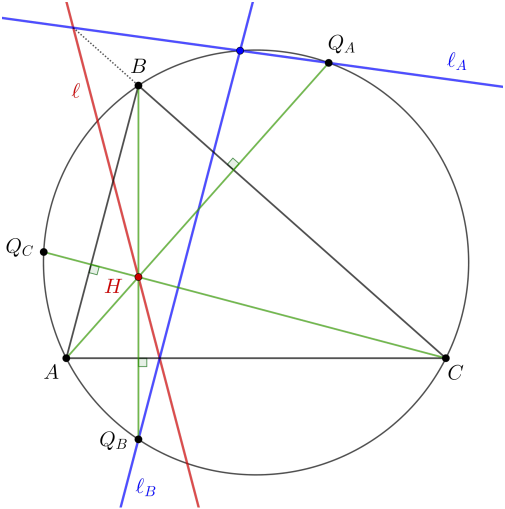
Exercice 2



L'angle bleu est de mesure 30°, les angles orange sont de mesure 120°, les angles rouges de mesure 60°.

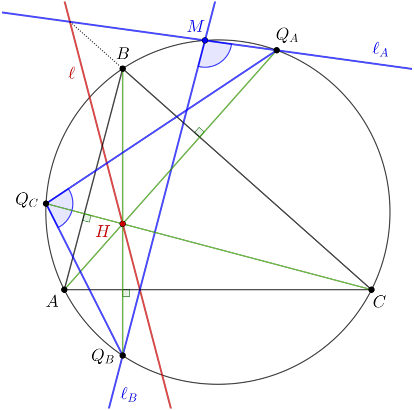
- Par cocyclicité de B, D, H et E, on a $\widehat{CHA} = 180 - \widehat{ABC} = 120$
- Par l'angle au centre, on a $\widehat{COA} = 2 \times \widehat{ABC} = 120$
- $\widehat{CHA} = \widehat{COA}$ donc C, O, H et A sont cocycliques
- On conclut par l'angle inscrit : $\widehat{CHO} = \widehat{OAC} = 30$

Exercice 3



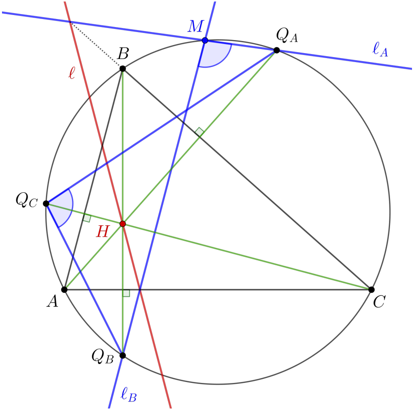
- La droite ℓ_A passe par Q_A, le symétrique de H par rapport à (BC)
- D'après le cours, Q_A appartient au cercle circonscrit à ABC

Exercice 3



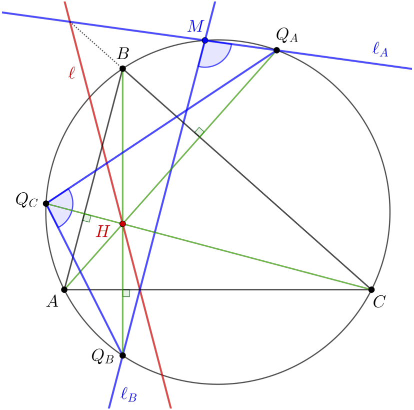
- Soit M le point d'intersection de ℓ_A et ℓ_B
- Il suffit de montrer que M appartient au cercle circonscrit à ABC

Exercice 3



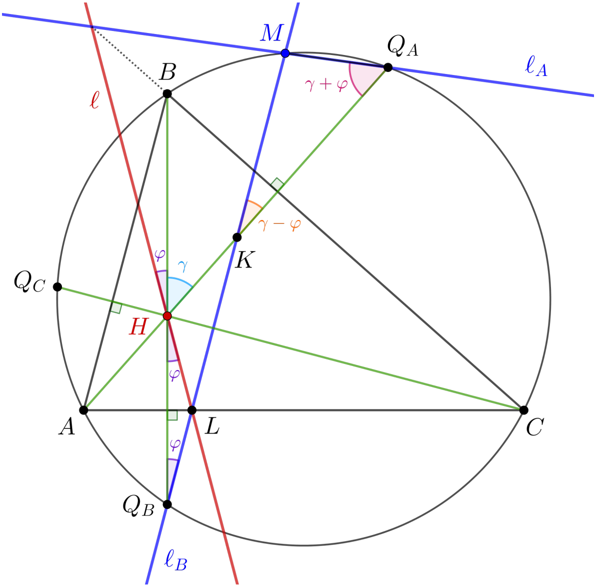
- Soit M le point d'intersection de ℓ_A et ℓ_B
- Il suffit de montrer que M appartient au cercle circonscrit à ABC
- Il suffit de montrer que $\widehat{Q_B M Q_A} = \widehat{Q_B Q_C Q_A}$

Exercice 3



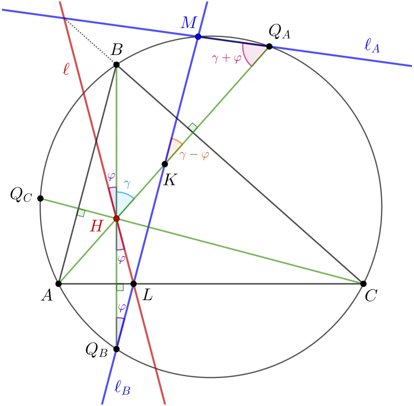
- Soit M le point d'intersection de ℓ_A et ℓ_B
- Il suffit de montrer que M appartient au cercle circonscrit à ABC
- Il suffit de montrer que $\widehat{Q_B M Q_A} = \widehat{Q_B Q_C Q_A}$
- Or $\widehat{Q_B Q_C Q_A} = \widehat{H_B H_C H_A} = 180 - 2\gamma$

Exercice 3

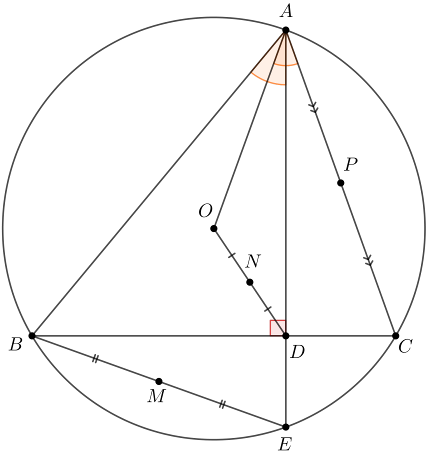


M
Q_A
ℓ_A
B
ℓ
$\gamma+\varphi$
$\gamma-\varphi$
K
φ
γ
Q_C
H
φ
A
L
C
φ
Q_B
ℓ_B

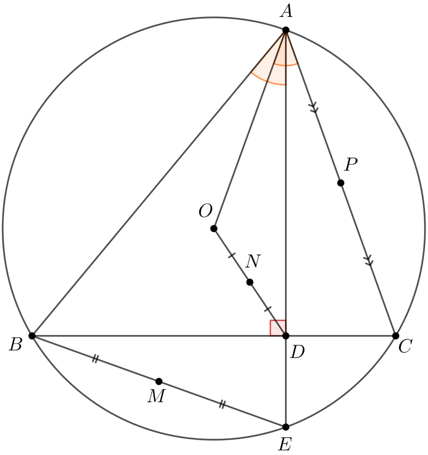
Exercice 3



- Soient K et L les points d'intersection de ℓ_B avec (AQ_A) et (AC)
- Par chasse aux angles (voir figure), on trouve $\widehat{MQ_AK} = \gamma + \varphi$ et $\widehat{Q_AKM} = \gamma - \varphi$, où $\varphi = \widehat{LHQ_B}$
- On a donc bien $\widehat{Q_BMQ_A} = 180 - (\gamma + \varphi) - (\gamma - \varphi) = 180 - 2\gamma$!

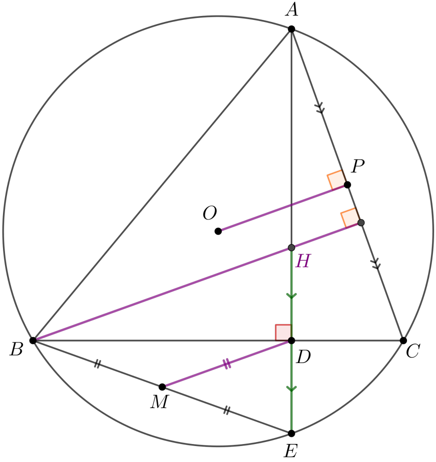


- D'après l'énoncé $\widehat{BAD} = \widehat{CAO}$, or d'après le cours $\widehat{CAO} = \widehat{BAH}$
- D est donc le pied de la hauteur issue de A !



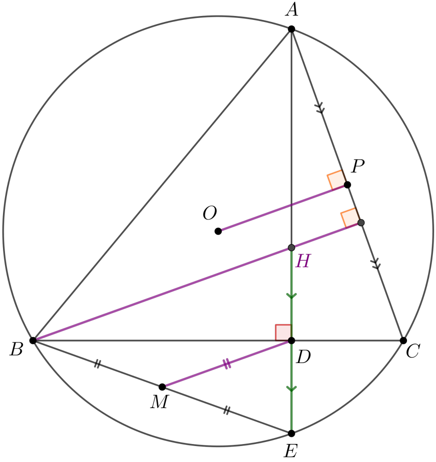
- D'après l'énoncé $\widehat{BAD} = \widehat{CAO}$, or d'après le cours $\widehat{CAO} = \widehat{BAH}$
- D est donc le pied de la hauteur issue de A !
- De plus, E n'est autre que le symétrique de H par rapport à (BC)

Nous avons maintenant très envie d'introduire H



Exercice 4

Nous avons maintenant très envie d'introduire H



- Théorème des milieux dans BHE : $(MD) \parallel (BH)$
- Par ailleurs $(BH) \parallel (OP)$, d'où $(MD) \parallel (OP)$

Exercice 4

Conjecture sur la figure

- Avec une figure propre, on conjecture alors que $OPDM$ est un parallélogramme
- Si c'est le cas, l'exo est fini car N est l'intersection des diagonales du parallélogramme $OPDM$, qui est bien sur la droite (MP)

Exercice 4

Conjecture sur la figure

- Avec une figure propre, on conjecture alors que $OPDM$ est un parallélogramme
- Si c'est le cas, l'exo est fini car N est l'intersection des diagonales du parallélogramme $OPDM$, qui est bien sur la droite (MP)

Preuve de la conjecture

- Nous savons déjà que $(MD) \parallel (OP)$, il reste à montrer que $MD = OP$
- Par les milieux $BH = 2MD$, il suffit donc de montrer que $BH = 2OP$
- Loi des sinus dans ABH : $\frac{BH}{\sin(90-\beta)} = \frac{AB}{\sin(180-\gamma)}$
- Loi des sinus dans ABC : $\frac{AB}{\sin\gamma} = 2R = 2OA$
- D'où $BH = 2OA\sin(90-\beta) = 2OP$ en considérant le triangle OAP

Exercice 4

Conjecture sur la figure

- Avec une figure propre, on conjecture alors que $OPDM$ est un parallélogramme
- Si c'est le cas, l'exo est fini car N est l'intersection des diagonales du parallélogramme $OPDM$, qui est bien sur la droite (MP)

Preuve de la conjecture

- Nous savons déjà que $(MD) \parallel (OP)$, il reste à montrer que $MD = OP$
- Par les milieux $BH = 2MD$, il suffit donc de montrer que $BH = 2OP$
- Loi des sinus dans ABH : $\frac{BH}{\sin(90-\beta)} = \frac{AB}{\sin(180-\gamma)}$
- Loi des sinus dans ABC : $\frac{AB}{\sin\gamma} = 2R = 2OA$
- D'où $BH = 2OA\sin(90-\beta) = 2OP$ en considérant le triangle OAP

Remarque : il est aussi possible de ne pas passer par les longueurs et de montrer que $(OM) \parallel (PD)$ directement par chasse aux angles