Part I

Fonctions d'entiers et de rationnels

Exercice 1. (IMO 1977)(M) Trouver les fonctions de $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que pour tout $n > 0$ on ait

$$f(n) > f(f(n-1))$$

Exercice 2. (IMO 1987)(M-D) Existe t'il une $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout n on ait $f(f(n)) = n + 2019$?

Exercice 3. (IMO SL 2018 A1)(M-D)(*) Determiner les fonctions de fonctions $\mathbb{Q}_+^* \to \mathbb{Q}_+^*$ et telles que

$$f(x^2 f(y)^2) = f(x)^2 f(y)$$

Exercice 4. (IMO SL 2015 A2)(M-D) Trouver les $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tels que

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1$$

Exercice 5. (M) On se donne $a, b \in \mathbb{Q}$, trouver les $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que

$$f(x + a + f(y)) = f(x + b) + y$$

Part II
Fonctions réelles

Exercice 6. (M-D) Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(1) = 1$ et $f(xy+f(x)) = xf(y) + f(x)$.

Exercice 7. (Taiwan TST 2020)(M-D) Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x + f(y)) + f(xy) = yf(x) + f(y) + f(f(x))$$

Part III
Asymptotique/Topologie

Exercice 8. (IMO SL A3 2013)(D)(*)
Soit $f : \mathbb{Q}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$f(x + y) \geq f(x) + f(y)$$

et

$$f(xy) \leq f(x)f(y)$$

On suppose de plus qu'il existe un $a > 1$ tel que $f(a) = a$. Montrer que $f = Id$.

Exercice 9. (D)(*) Trouver les $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}_*^+$ telles que

$$f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y)$$

Exercice 10. (D)(Bulagrie 1999)(*) Montrer qu'il n'existe pas de fonction de $\mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}_*^+$ telle que

$$f(x)^2 \geq f(x + y)(f(x) + y)$$

Exercice 11. (D) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, telle que $f(x + y)f(x - y) = f(x)^2$ montrer que f est identiquement nulle ou ne s'annule pas.

Exercice 12. (EMC 2020)(D)
Trouver les $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}_*^+$ telles que

$$\forall x, y > 0, xf(x + y) + f(xf(y) + 1) = f(xf(x))$$

Exercice 13. (M-D)
Montrer qu'il n'existe pas de $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}_*^+$ telle que

$$\forall x, y > 0, f(x + y) > f(x)(1 + f(x)y)$$

Exercice 14. (D)(*) Trouver les $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}_*^+$ telles que

$$f(x)f(yf(x)) = f(x + y)$$

Exercice 15. (M)(*) Trouver les $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ bornées telles que

$$f(n + k) + f(k - n) = 2f(k)f(n)$$