

Autour de H

Mathieu BARRÉ

Stage olympique avancé

24 avril 2021

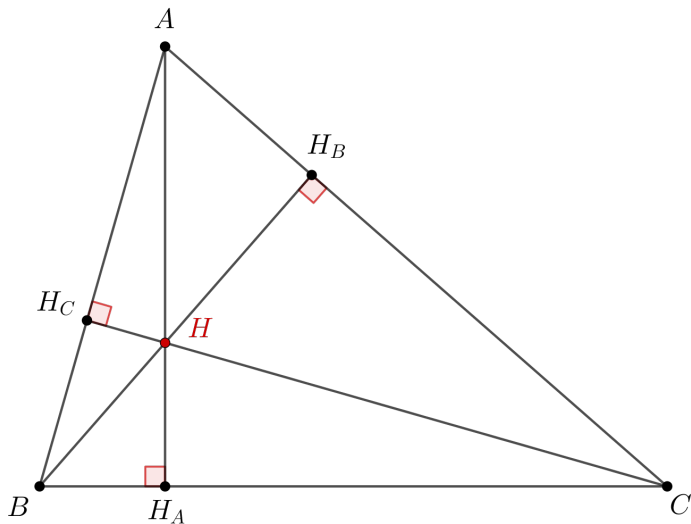
Plan de la séance

1. Quelques propriétés autour de l'orthocentre
 - Concourance des hauteurs
 - Cercles et triangles semblables autour de H
 - Lien entre O et H
 - Symétries de H par rapport aux côtés
2. Récapitulatif des propriétés
3. Séance d'exercices sur gather.town

1. Quelques propriétés autour de H

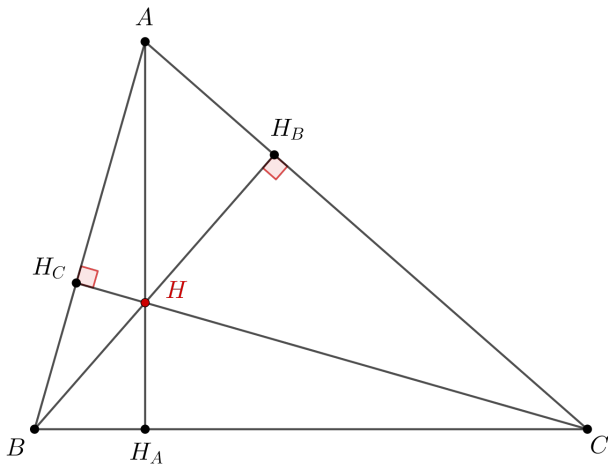
L'orthocentre

H est l'intersection des hauteurs du triangle



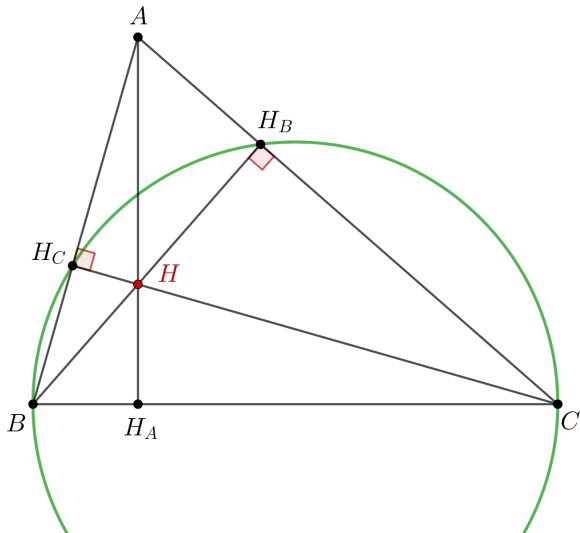
Concurrence des hauteurs : preuve par chasse aux angles

- On définit H comme l'intersection de (BH_B) et (CH_C)
- On veut montrer que $(AH_A) \perp (BC)$



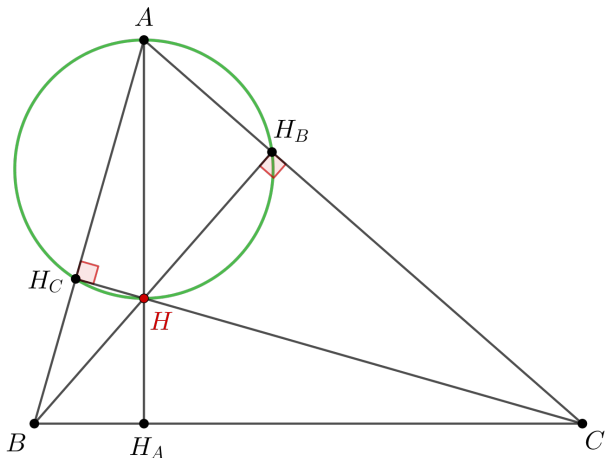
Concurrence des hauteurs : preuve par chasse aux angles

D'après le théorème de l'angle inscrit, B , H_C , H_B et C sont cocycliques

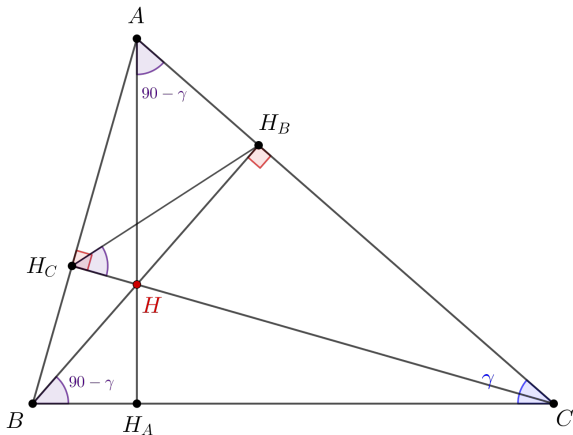


Concurrence des hauteurs : preuve par chasse aux angles

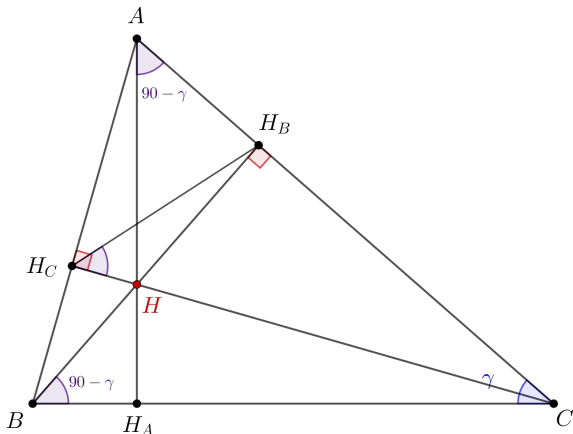
D'après le théorème de cocyclicité, A , H_B , H et H_C sont cocycliques



Concurrence des hauteurs : preuve par chasse aux angles

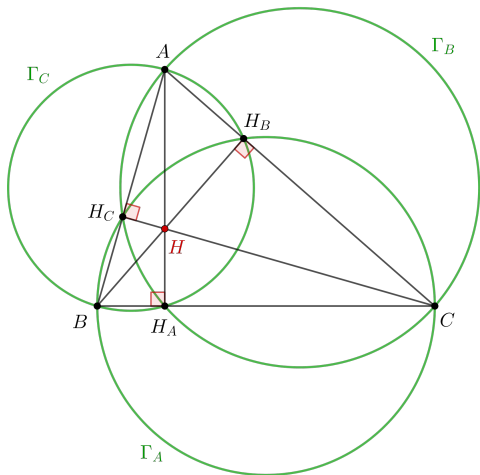


Concurrence des hauteurs : preuve par chasse aux angles

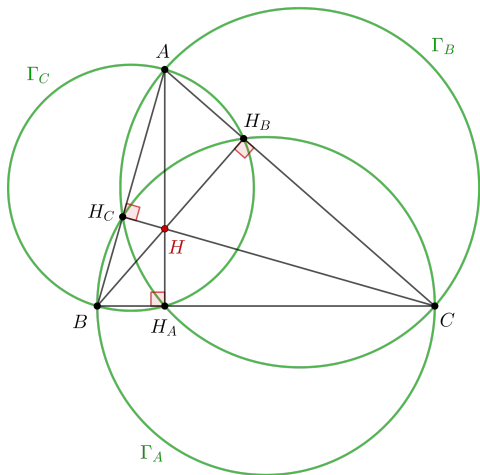


- B, H_C, H_B et C sont cocycliques donc $\widehat{CBH_B} = \widehat{CH_CH_B}$
- A, H_B, H et H_C sont cocycliques donc $\widehat{HH_CH_B} = \widehat{HAH_B}$
- Conclusion : $\widehat{CAH_A} = 90 - \gamma$ donc $\widehat{AH_A C} = 90$

Concurrence des hauteurs : preuve avec les axes radicaux



Concurrence des hauteurs : preuve avec les axes radicaux

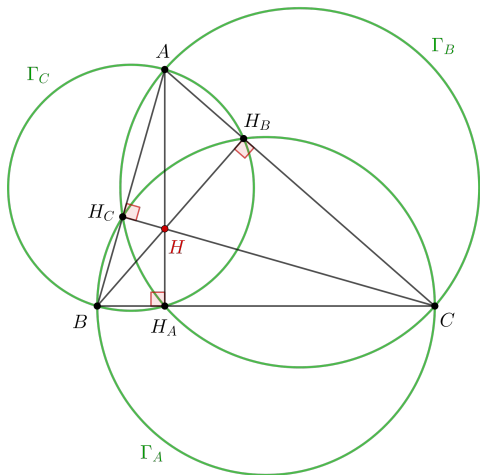


Axe radical $(\Gamma_A, \Gamma_C) = (CH_C)$

Axe radical $(\Gamma_B, \Gamma_C) = (AH_A)$

Axe radical $(\Gamma_C, \Gamma_A) = (BH_B)$

Concurrence des hauteurs : preuve avec les axes radicaux



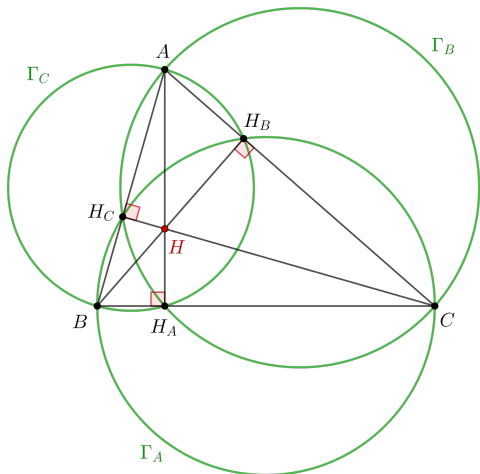
Axe radical $(\Gamma_A, \Gamma_C) = (CH_C)$

Axe radical $(\Gamma_B, \Gamma_C) = (AH_A)$

Axe radical $(\Gamma_C, \Gamma_A) = (BH_B)$

Ces trois axes radicaux sont
concourants en H

Concurrence des hauteurs : preuve avec les axes radicaux



Axe radical $(\Gamma_A, \Gamma_C) = (CH_C)$

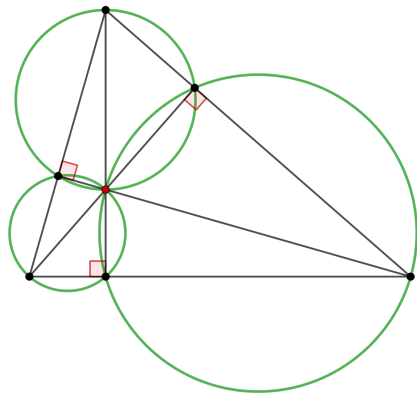
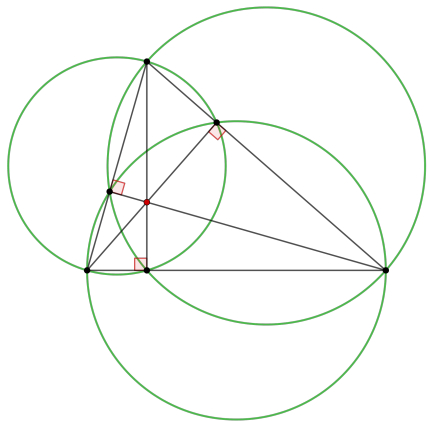
Axe radical $(\Gamma_B, \Gamma_C) = (AH_A)$

Axe radical $(\Gamma_C, \Gamma_A) = (BH_B)$

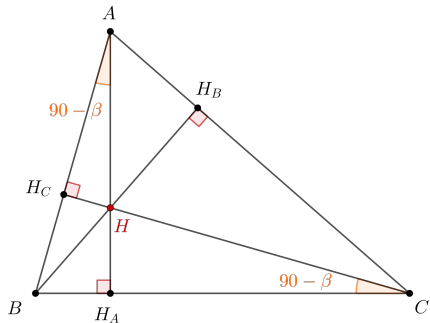
Ces trois axes radicaux sont concourants en H

En particulier, on a
 $HA \cdot HH_A = HB \cdot HH_B = HC \cdot HH_C$

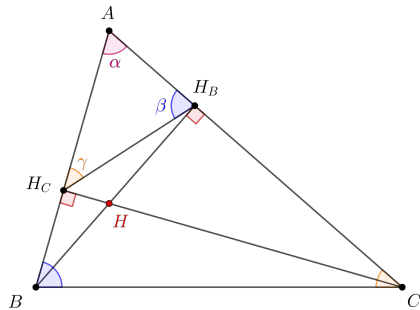
Cercles autour de H



Triangles semblables autour de H



$$BAH_A \sim BCH_C$$



$$AH_BH_C \sim ABC$$