PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 31 MARS 2021

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2006 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2005 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire (au moins) une figure pertinente sur une feuille séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, si l'on souhaite démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.
- Si l'élève ne respecte pas la consigne précédente, il perdra automatiquement un point à l'exercice concerné (on ne donne pas de note strictement négative).

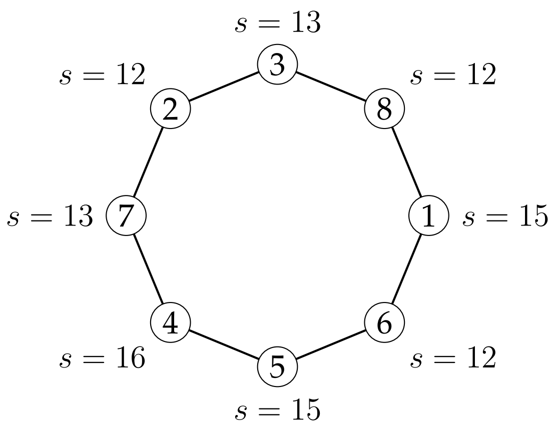
  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Junior

Exercice 1. Morgane et Bosphore jouent au jeu suivant. Morgane a écrit les entiers de 1 à 8 sur les sommets d'un octogone régulier : chaque entier est écrit sur un des huit sommets de l'octogone. Bosphore choisit ensuite un sommet et calcule la somme des nombres écrits sur ce sommet et sur ses deux voisins. Il note s cette somme, et donne s bonbons à Morgane.

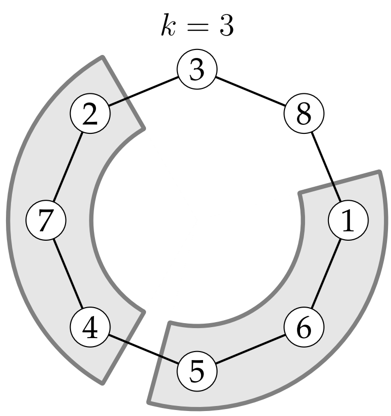
Bosphore choisit un sommet de sorte à donner le moins possible de bonbons à Morgane, et Morgane écrit les entiers de 1 à 8 de sorte à recevoir autant de bonbons que possible. Démontrer que Bosphore lui donnera 12 bonbons.

Solution de l'exercice 1 Tout d'abord, si Morgane répartit les entiers de 1 à 8 comme suit, on constate en effet que Bosphore devra lui donner au moins 12 bonbons ; on a indiqué, à côté de chaque sommet, la somme s que calculerait Bosphore s'il choisissait ce sommet.

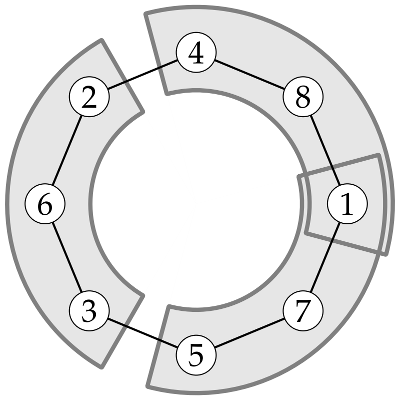


Réciproquement, quel que soit la répartition que choisit Morgane, Bosphore peut procéder comme suit pour éviter de lui donner 13 bonbons ou plus. Ci-dessous, on identifie chaque sommet à l'entier que Morgane a écrit sur ce sommet.

Si les deux voisins du sommet 8 sont les sommets 1 et 2, Bosphore n'a qu'à choisir le sommet 8, et il ne donnera que 11 bonbons à Morgane. Sinon, l'un des deux sommets de 8 est un entier $k \geqslant 3$. Bosphore répartit les six sommets restants en deux groupes de trois sommets consécutifs, comme illustré ci-dessous. La somme des valeurs de ces deux groupes de sommets vaut $(1 + 2 + \ldots + 8) - (k + 8) = 28 - k \leqslant 25$, donc l'un des deux groupes est de somme $s \leqslant 12$. Bosphore s'assure alors de donner au plus 12 bonbons à Morgane en choisissant le sommet au milieu de ce groupe.

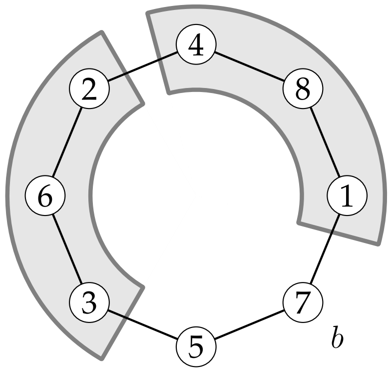


Solution alternative n°1 Bosphore a d'autres manières de procéder, par exemple celle-ci. Regroupons les sommets en trois groupes de trois, de sorte que le sommet de valeur 1 soit le seul sommet appartenant à deux groupes. La somme des valeurs de ces groupes de sommets vaut $1 + (1 + 2 + \ldots + 8) = 37 < 3 \times 13$, donc l'un de ces groupes est de valeur $s \leqslant 12$, et Bosphore n'a qu'à choisir le sommet au milieu de ce groupe.



Solution alternative n°2 Voici une troisième manière, pour Bosphore, de s'assurer qu'il donnera au plus 12 bonbons à Morgane. Soit a et b les deux voisins du sommet 5, avec $a \geqslant b$. Si $b \leqslant 4$, alors $a \leqslant 3$, donc $a + b + 5 \leqslant 12$ et Bosphore choisit directement le sommet 5.

Sinon, on sait que $b \geqslant 6$. Bosphore élimine alors les sommets 5 et b, qui sont contigus, et répartit les six sommets restants en deux groupes de trois sommets consécutifs. Comme dans la solution précédente, la somme des valeurs de ces deux groupes de sommets vaut $(1 + 2 + \ldots + 8) - (5 + b) = 31 - b \leqslant 25$, donc l'un des deux groupes est de somme $s \leqslant 12$. Bosphore choisit alors le sommet au milieu de ce groupe.



Solution alternative n°3 Voici encore une manière de démontrer que Bosphore pourra nécessairement se débrouiller pour donner au plus 12 bonbons à Morgane. À la différence des solutions précédentes, celle-ci ne fournit pas de stratégie explicite pour Bosphore.

Supposons que Morgane ait trouvé une configuration qui force Bosphore à lui donner au moins 13 bonbons. On numérote les sommets de l'octogone de 1 à 8, ces numéros étant considérés modulo 8. On note alors a_i le nombre que Morgane a écrit sur le sommet i, et on note s_i la somme $a_{i-1} + a_i + a_{i+1}$.

Remarquons que $s_{i+1} - s_i = a_{i+2} - a_{i-1} \neq 0$, et ce quelle que soit la valeur de i. Ainsi, la somme de deux nombres s_i consécutifs vaut au minimum $13 + 14 = 27$. En outre, la somme des entiers s_i vaut $3(a_1 + a_2 + \ldots + a_8) = 3(1 + 2 + \ldots + 8) = 108 = 4 \times 27$. Par conséquent, la somme de deux nombres s_i consécutifs vaut toujours 27, et les s_i alternent entre les valeurs 13 et 14, de sorte que $s_1 = s_3 = s_5 = s_7$ et $s_2 = s_4 = s_6 = s_8$.

Dans ces conditions, on constate que

$$0 = (s_2 - s_3) + (s_5 - s_6) = (a_1 - a_4) + (a_4 - a_7) = a_4 - a_7,$$

ce qui est impossible. Ainsi, Morgane ne pourra jamais forcer Bosphore à lui donner 13 bonbons ou plus.

Commentaire des correcteurs Cet exercice a été très réussi dans l'ensemble, à la grande satisfaction des correcteurs. La grande majorité des élèves avait identifié les deux enjeux, qui consistaient à démontrer, à l'aide d'un exemple de configuration possible, que Morgane pouvait forcer Bosphore à lui donner au moins 12 bonbons, puis à démontrer qu'elle ne pouvait pas faire mieux.

Un très grand nombre d'élèves a pensé à regarder la somme des scores des huit groupes de trois, qui valait $3 \times (1 + 2 + \ldots + 8) = 108 = 13 \times 8 + 4$, pour en déduire instantanément que Morgane pourrait gagner au plus 13 bonbons. Cela ne répondait bien sûr pas directement à l'énoncé, mais permettait de s'en approcher, ce qui est toujours positif. Un tel résultat n'était donc certes pas valorisé, mais les éléments de raisonnement qui y avaient mené, et qui étaient réutilisables pour se ramener à 12 bonbons, l'ont bien sûr été.

Notons néanmoins quelques bévues que l'on a retrouvé dans de multiples copies, et qui ont systématiquement coûté des points à leurs auteurs :

- Plusieurs élèves se sont trompés dans leur contre-exemple, permettant à Bosphore de donner 11 bonbons ou moins à Morgane, ou bien écrivant deux fois un entier entre 1 et 8 et zéro fois un autre. En règle générale, il est bien sûr indispensable de se relire, d'autant plus que vérifier ces contre-exemples prenait généralement de l'ordre de 20 à 30 secondes, qui ne sont donc manifestement pas du temps perdu.
- Plusieurs élèves se sont trompés dans leurs calculs, par exemple en indiquant que $108 < 13 \times 8$, ce qui aurait permis de s'en sortir en utilisant le principe des tiroirs (ou de la moyenne, ce qui revient au même). Comme au point précédent, une fois une solution écrite, et d'autant plus si elle est simple et courte, se relire est indispensable et **toujours** salutaire : soit l'élève repère une erreur et a la possibilité de la corriger, soit il s'assure d'avoir très vraisemblablement une solution correcte.
- Enfin, plusieurs élèves ont procédé par disjonction de cas, utilisant souvent des arguments de symétrie, mais sans les préciser, voire sans préciser du tout comment fonctionnait leur disjonction de cas. Dans une telle situation, ces élèves ont très souvent perdu un ou plusieurs points, car il était impossible distinguer l'élève qui a vraiment procédé à une disjonction de cas sans en oublier un seul de l'élève qui bluffe car il a confiance en l'énoncé et sait à quel résultat il souhaite aboutir.

Exercice 2. Soit x, y et z trois nombres réels tels que $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z$ et $x+y+z=1$. Trouver la valeur maximale que peut prendre l'expression

$$(x-yz)^2 + (y-zx)^2 + (z-xy)^2.$$

Solution de l'exercice 2 La quantité que l'on souhaite maximiser peut se réécrire comme

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= (x^2+y^2+z^2) + ((xy)^2+(yz)^2+(zx)^2) - 6xyz \\
&= (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) + (xy+yz+zx)^2 - 2xyz(x+y+z) - 6xyz \\
&= 1 - 2(xy+yz+zx) + (xy+yz+zx)^2 - 8xyz \\
&= (xy+yz+zx-1)^2 - 8xyz.
\end{aligned}$$

Puisque $0 \leqslant xy+yz+zx \leqslant (x+y+z)^2/2 = 1/2$, on en déduit que $\mathcal{S} \leqslant 1$. Réciproquement, si $x=y=0$ et $z=1$, on a bien $\mathcal{S}=1$, ce qui conclut.

Solution alternative n°1 La quantité que l'on souhaite maximiser peut se réécrire comme

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= (x^2+y^2+z^2) + ((xy)^2+(yz)^2+(zx)^2) - 6xyz \\
&= (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) + ((xy)^2+(yz)^2+(zx)^2) - 6xyz.
\end{aligned}$$

Or, l'énoncé indique que $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 1$, de sorte que $0 \leqslant xy \leqslant xz \leqslant yz \leqslant 1$. Puisque tout nombre t tel que $0 \leqslant t$ satisfait l'inégalité $t^2 \leqslant 2t$, on en déduit que $\mathcal{S} \leqslant (x+y+z)^2 - 6xyz \leqslant 1$. Réciproquement, si $x=y=0$ et $z=1$, on a bien $\mathcal{S}=1$, ce qui conclut.

Solution alternative n°2 Les inégalités $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant x+y+z=1$ indiquent que $z \geqslant y \geqslant xy$ et $y \geqslant x \geqslant zx$, de sorte que la quantité que l'on souhaite maximiser satisfait l'inégalité

$$\mathcal{S} \leqslant \max\{x, yz\}^2 + y^2 + z^2.$$

Puisque $x^2+y^2+z^2 \leqslant (x+y+z)^2 = 1$ et $(yz)^2+y^2+z^2 \leqslant 2yz+y^2+z^2 = (y+z)^2 = (1-x)^2 \leqslant 1$, on en déduit que $\mathcal{S} \leqslant 1$. Réciproquement, si $x=y=0$ et $z=1$, on a bien $\mathcal{S}=1$, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs L'inégalité proposée était inhabituelle, en ce sens que l'optimum recherché était obtenu lorsque les variables n'étaient pas égales l'une à l'autre, ce qui est peu courant. De nombreux élèves ont eu l'intuition (correcte) selon laquelle le maximum recherché était égal à 1, et qu'il était obtenu lorsque $x=y=0$ et $z=1$. Ils se sont ensuite attachés à démontrer que l'expression recherchée ne pouvait jamais dépasser 1, et il s'agissait là de la démarche attendue, ce qui a ravi les correcteurs.

Cependant, voici quelques erreurs évitables que plusieurs élèves ont commises :

- ▷ Certains élèves ont simplement cherché à trouver des majorations de l'expression étudiée, sans même regarder des cas particulier, dont le cas où $x=y=0$ et $z=1$, pour se faire une idée. D'autres ont carrément dit qu'ils souhaitaient démontrer l'inégalité $\mathcal{S} \leqslant 1$, mais n'ont pas pensé à indiquer que $\mathcal{S}=1$ quand $x=y=0$ et $z=1$. De telles omissions sont regrettables, car l'élève renonce ainsi purement et simplement à des points qui lui tendaient la main.
- ▷ Plusieurs élèves ont écrit des inégalités qui étaient toutes correctes, mais qui étaient manifestement trop faibles pour conclure. Ainsi, un élève a commencé par démontrer que $\mathcal{S} \leqslant 3(z-xy)^2$. Si cette inégalité est correcte, elle est également inutile pour montrer que $\mathcal{S} \leqslant 1$, puisque le membre de droite vaut 3 lorsque $x=y=0$ et $z=1$.

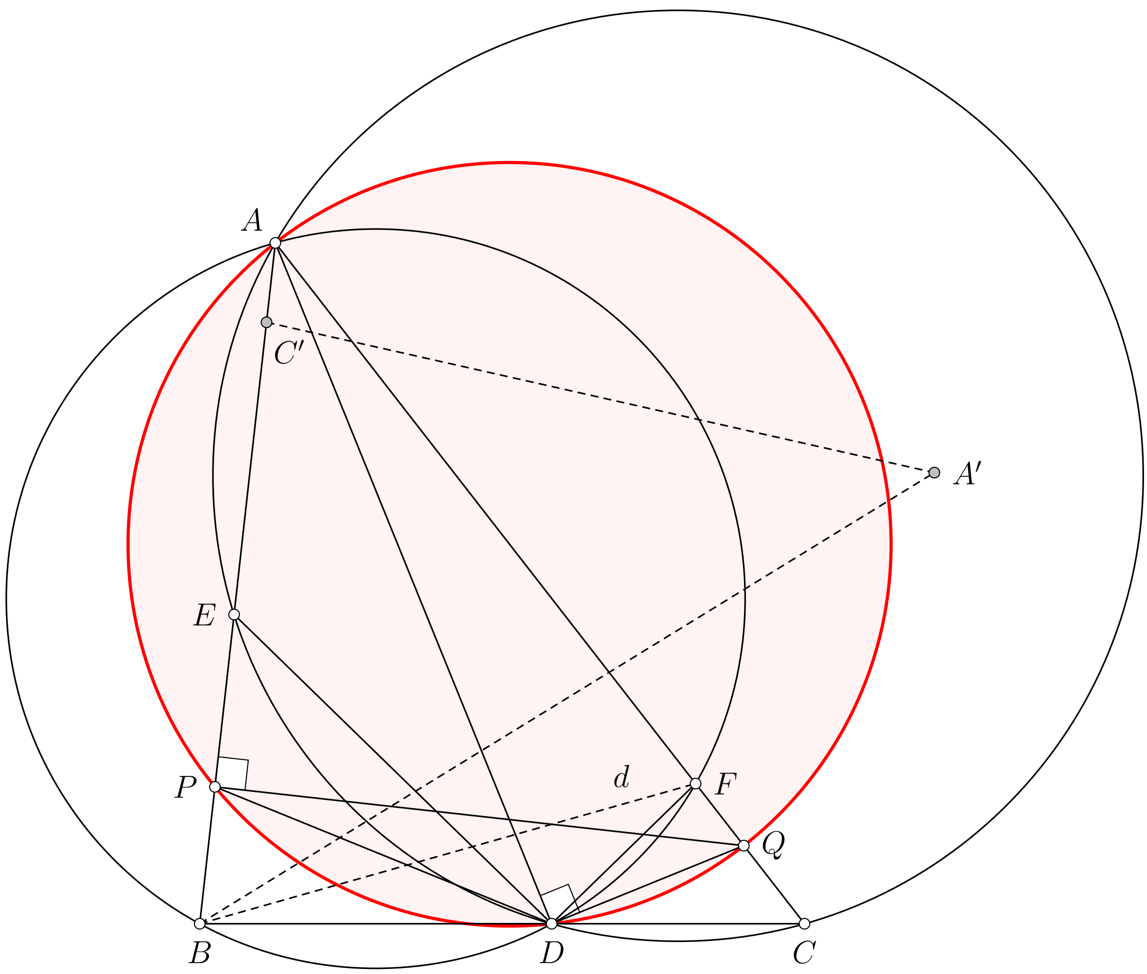
  De manière générale, lorsque l'on souhaite démontrer une inégalité en introduisant des inégalités intermédiaires, il est bien sûr indispensable de s'assurer, ne serait-ce qu'en regardant des exemples simples, que celles-ci ont une chance d'être suffisamment précises pour aboutir. Dans notre cas, toute inégalité intermédiaire utilisable devait en fait être une égalité lorsque $x=y=0$ et $z=1$.

Exercice 3. Soit ABC un triangle tel que $90^\circ > \widehat{ABC} > \widehat{BCA}$. Soit D le point sur le segment $[BC]$ tel que $2\widehat{DAC} = \widehat{ABC} - \widehat{BCA}$. On note E le point d'intersection, autre que A, entre (AB) et le cercle circonscrit à ACD, puis P le point d'intersection entre (AB) et la bissectrice de $\widehat{BDE}$. De même, on note F le point d'intersection, autre que A, entre (AC) et le cercle circonscrit à ABD, puis Q le point d'intersection entre (AC) et la bissectrice de $\widehat{CDF}$.
Démontrer que (AB) et (PQ) sont perpendiculaires.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Comme d'habitude, on commence par une figure suffisamment belle et grande pour servir de support à la réflexion. À cette fin, on construit tout d'abord un triangle $A'BC'$ isométrique à ABC, tel que C' se trouve sur la demi-droite $[BA)$, puis on trace la bissectrice de l'angle $\widehat{CBA'}$, que l'on note d. On peut alors reporter en A l'angle en entre les droites (BC) et d, pour construire la demi-droite $[AD)$.
Alternativement, la cocyclicité des points A, B, D et F nous assure de l'égalité

$$\widehat{DBF} = \widehat{DAF} = \widehat{DAC} = \widehat{CBA'}/2.$$

Ainsi, F est le point d'intersection des droites (AC) et d, et D est le point d'intersection, autre que B, de la droite (BC) avec le cercle circonscrit à ABF.



Au vu de l'énoncé, une chasse aux angles s'impose. On pose donc $x = \widehat{BCA}$ et $y = \widehat{DAC}$, puis l'on constate que

$$2\widehat{CDQ} = \widehat{CDF} = 180^\circ - \widehat{FDB} = \widehat{BAF} = \widehat{BAC} = 180^\circ - 2(x + y),$$

de sorte que $\widehat{CDQ} = 90° - (x+y)$. De même,

$$2\widehat{PDB} = \widehat{EDB} = 180° - \widehat{CDE} = \widehat{EAC} = \widehat{BAC},$$

de sorte que $\widehat{PDB} = 90° - (x+y)$.
On continue notre chasse aux angles, d'où l'on déduit que

$$\widehat{QDA} = 180° - \widehat{DAQ} - \widehat{AQD} = 180° - y - (180° - \widehat{DQC}) = (180° - \widehat{CDQ} - \widehat{QCD}) - y = 90°.$$

Il s'agit donc de démontrer que A, P, D et Q sont cocycliques. On vérifie alors que

$$\widehat{DPA} = 180° - \widehat{BPD} = \widehat{PDB} + \widehat{DBP} = (90° - x - y) + (x + 2y) = 90° + y = 180° - \widehat{AQD},$$

ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs L'exercice comportait deux difficultés :

- La première difficulté était de tracer la figure. Ici il était certes possible de résoudre le problème sans avoir une figure exacte, mais il est toujours bon de s'intéresser à a construction exacte de la figure car bien souvent, trouver comment construire une figure comportant une hypothèse compliquée, c'est déjà commencer à résoudre l'exercice. De plus, une figure exacte permettait de constater visuellement que l'angle $\widehat{QDA}$ était droit, ce qui constituait une étape cruciale de la preuve.
- La deuxième difficulté était d'exprimer tous les angles de la figures uniquement en fonction des angles $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$. Les quelques élèves ayant réussi ce travail ont pour la plupart résolu l'exercice dans la foulée.

Exercice 4. Trouver tous les triplets d'entiers naturels non nuls (a, b, c) tels que

$$2021^a + 4 = 3^b \times 5^c.$$

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Dans une équation diophantienne, on commence toujours par regarder de petites valeurs des paramètres. Ici, il suffit de factoriser $2021^a + 4$ en produit de facteurs premiers, donc on regarde les petites valeurs de a. Ici, lorsque $a = 1$, l'équation devient $2025 = 3^b \times 5^c$, donc $(a, b, c) = (1, 4, 2)$ est solution. Par ailleurs, si $a \geqslant 2$, personne n'a envie de factoriser $2021^a + 4$, donc on arrête ici notre exploration des petits cas.

Dans un deuxième temps, il faudra soit procéder à des factorisations, soit regarder l'équation modulo un nombre n bien choisi pour réduire l'ensemble des valeurs possibles de a, b et c. Les nombres 3 et 5 sont manifestement des nombres premiers, et notre étude du cas $a = 1$ indique que $2021 = 45^2 - 4 = 43 \times 47$. On note donc cette relation dans un coin de notre brouillon en attendant de pouvoir en faire usage.

Enfin, quitte à utiliser le théorème chinois, on réduit notre équation modulo n lorsque n est une puissance de nombre premier. Par exemple :

- ▷ $n = 1$, $n = 2$ et $n = 5$ ne nous apportent aucune information ;
- ▷ $n = 3$ indique que a est impair ;
- ▷ $n = 4$ indique que b est pair ;
- ▷ $n = 7$ ne nous apporte aucune information facile à exploiter ;
- ▷ $n = 8$ indique, puisque a est impair et b est pair, que c est pair.

On pose alors $\beta = b/2$ et $\gamma = c/2$. En outre, deux des trois termes de notre équation sont des carrés, ce qui nous permet d'obtenir la factorisation

$$43^a \times 47^a = 2021^a = (3^\beta \times 5^\gamma)^2 - 2^2 = (3^\beta \times 5^\gamma + 2)(3^\beta \times 5^\gamma - 2).$$

Puisque $3^\beta \times 5^\gamma + 2$ et $3^\beta \times 5^\gamma - 2$ sont deux entiers impairs dont la différence vaut 4, ils sont premiers entre eux.

Seul l'un de ces deux facteurs est divisible par 43, et seul l'un est divisible par 47. Plusieurs cas sont donc possibles a priori :

- ▷ si 47 divise $3^\beta \times 5^\gamma - 2$, alors 47^a divise $3^\beta \times 5^\gamma - 2$, donc $3^\beta \times 5^\gamma - 2 \geqslant 47^a \geqslant 43^a \geqslant 3^\beta \times 5^\gamma + 2$, ce qui est impossible ;
- ▷ si 43 et 47 divisent $3^\beta \times 5^\gamma + 2$, on a $3^\beta \times 5^\gamma + 2 = 43^a \times 47^a$ et $3^\beta \times 5^\gamma - 2 = 1$, ce qui est impossible puisque $3^\beta \times 5^\gamma - 2 \geqslant 3 \times 5 - 2 = 13$.

Ainsi, 47 divise $3^\beta \times 5^\gamma + 2$ et 43 divise $3^\beta \times 5^\gamma - 2$, de sorte que $3^\beta \times 5^\gamma + 2 = 47^a$ et $3^\beta \times 5^\gamma - 2 = 43^a$. Mais alors

$$4 = (3^\beta \times 5^\gamma + 2) - (3^\beta \times 5^\gamma - 2) = 47^a - 43^a \geqslant 47^a - 43 \times 47^{a-1} = 4 \times 47^{a-1},$$

ce qui démontre que $a \leqslant 1$.

En conclusion, la seule solution du problème est $(a, b, c) = (1, 4, 2)$.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> L'exercice était difficile, mais de nombreux élèves ont réussi à obtenir des points grâce à des réflexions intelligentes. Trouver une solution particulière est toujours une avancée, puisqu'elle permet de voir ce qu'on pourra ou non prouver : ici $(1, 4, 2)$ était solution, donc on pouvait s'attendre à avoir b ou c pair, en tout cas il était illusoire de prouver que b ou c était impair sans hypothèses supplémentaires sur a.

Rappelons que regarder modulo un nombre composé est très rarement intelligent : regarder modulo 15 par exemple ne sert à rien, puisqu'on peut faire les mêmes observations modulo 3 et 5, et comme les calculs sont plus simples, cela permet de ne pas faire d'erreur.

Ici la clé du problème était de s'interroger sur les parité de b, c pour obtenir un carré : obtenir des carrés en équation diophantienne est crucial, car cela permet de factoriser et donc de rendre le problème plus simple. Néanmoins, une fois l'équation factorisée, certains oublient de préciser que les deux termes sont positifs, et qu'ils sont même strictement plus grand que 1, ce qui fait qu'on ne peut pas conclure immédiatement qu'un des facteurs vaut 47^a et l'autre 43^a. De plus, il serait bien de justifier rigoureusement à la fin que $47^a = 43^a + 4$ implique $a = 1$. Par exemple, on peut invoquer que $47^2 > 43^2 + 4$ et dire que par récurrence immédiate $47^k > 43^k + 4$ si $k \geqslant 2$.

Énoncés Senior

Exercice 5. On note $\mathbb{Z}[x,y,z]$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers en les trois variables x, y et z. On dit ensuite qu'un polynôme $P \in \mathbb{Z}[x,y,z]$ est *olympique* si $\mathbb{Z}[x,y,z]$ contient des polynômes A, B et C tels que

$$P(x,y,z) = (x+y+z)A(x,y,z) + (xy+yz+zx)B(x,y,z) + xyzC(x,y,z).$$

Trouver le plus grand entier n pour lequel il existe des entiers naturels i, j et k de somme $i+j+k=n$ et tels que le polynôme $x^iy^jz^k$ ne soit *pas* olympique.

Note : Un polynôme à coefficients entiers en les variables x, y et z est une fonction que l'on peut écrire comme une somme de termes de la forme $\lambda x^iy^jz^k$, où λ est un entier relatif et i, j et k sont des entiers naturels. Par exemple, $x-y+1$ et $xy+yz+zx$ sont de tels polynômes, mais πxyz, $\exp(x)$, $x/(y^2+1)$ et $\sqrt{xy+z}$ n'en sont pas.

Solution de l'exercice 5 Posons $s_1 = x+y+z$, $s_2 = xy+yz+zx$ et $s_3 = xyz$. On constate que

$$\begin{cases} x^3 \equiv -x^2(y+z) \equiv -x(xy+xz) \equiv xyz \equiv 0 & \pmod{s_1, s_2, s_3} \\ x^2y^2 \equiv xy(-xz-yz) \equiv -xyz(x+y) \equiv 0 & \pmod{s_1, s_2, s_3}, \end{cases}$$

ce qui signifie que x^3 et x^2y^2 sont olympiques. Or, l'ensemble des polynômes olympiques est stable par multiplication par tout polynôme et par permutation des variables.

Par conséquent, considérons un polynôme $x^iy^jz^k$, non olympique. Sans perte de généralité, on suppose que $i \geqslant j \geqslant k$. Si $i \geqslant 3$, $j \geqslant 2$ ou $k \geqslant 1$, notre polynôme est un multiple de x^3, de x^2y^2 ou de xyz, donc il est olympique. On en déduit que $i \leqslant 2$, $j \leqslant 1$ et $k \leqslant 0$, de sorte que $i+j+k \leqslant 3$. Cela nous assure déjà que $n \leqslant 3$.

Réciproquement, intéressons-nous à l'ensemble $\mathcal{E}$ des polynômes olympiques dont tous les monômes sont de degré total 3, c'est-à-dire sont des polynômes $x^iy^jz^k$ tels que $i+j+k=3$. Quitte à restreindre respectivement A, B et C à leurs monômes de degrés totaux 2, 1 et 0, chaque polynôme de $\mathcal{E}$ s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} P &= (x+y+z)(ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz) + (xy+yz+zx)(gx+hy+iz) + jxyz \\ &= ax^3+by^2+cz^3+(a+d+g)x^2y+(a+e+g)x^2z+(b+d+h)y^2x+(b+f+h)y^2z \\ &\quad + (c+e+i)z^2x+(c+f+i)z^2y+(d+e+f+g+h+i+j)xyz. \end{aligned}$$

Si x^2y est olympique, on a alors

$$1 = (a+d+g)+(b+f+h)+(c+e+i)-(a+e+g)-(b+d+h)-(c+f+i) = 0,$$

ce qui est absurde. Ainsi, le polynôme x^2y n'est pas olympique, et le plus grand entier recherché est $n=3$.

Commentaire des correcteurs L'exercice était difficile, mais de nombreux élèves ont bien avancé sur le problème, en montrant que plusieurs polynômes étaient olympiques. Attention néanmoins aux erreurs de calcul !

Certains ont essayé de montrer que x^2y n'était pas olympique en faisant de l'arithmétique sur les polynômes à plusieurs variables. Cette approche était risquée et, comme toute voie compliquée pour obtenir la solution, elle a mené à de nombreuses erreurs.

Ici, la la clé était de regarder les termes de degré 3 mais en deux variables, c'est-à-dire en x^2y, x^2z, z^2x, z^2y, y^2x et y^2z. Attention, toutefois : certains élèves ont procédé par l'absurde et, à partir de polynômes (A, B, C) qui permettaient d'obtenir x^2y, ont exhibé de nouveaux (A', B', C') qui permettaient d'obtenir $\pm y^2x$, puis en ont conclu directement que comme on se ramenait au même cas (à symétrie près) c'était impossible. Il n'y a à priori pas de raison que ce soit le cas : il pourrait y avoir de nombreux triplets (A, B, C) permettant d'obtenir que x^2y est olympique !

Enfin, après s'être restreints aux termes de degré 3, certains oublient les termes en x^2, y^2 et z^2 dans A, ce qui est dommage.

Exercice 6. Soit ABC un triangle isocèle en A, puis D un point du segment $[BC]$ tel que $BD \neq CD$. Soit P et Q les projetés orthogonaux de D sur (AB) et (AC). Enfin, soit E le point d'intersection, autre que A, entre les cercles circonscrits à ABC et APQ.

Démontrer que, si les droites (EP), (AC) et la médiatrice de $[PQ]$ sont concourantes, le triangle ABC est rectangle en A.

Solution de l'exercice 6 Un premier réflexe est de dessiner une figure où le triangle ABC est isocèle rectangle, mais sans indiquer qu'il l'est. De nombreuses symétries apparaissent alors. Notons X le point d'intersection des droites (AC), et (EP), ℓ la médiatrice de $[PQ]$, O le centre du cercle circonscrit à ABC et M le milieu de $[BC]$: il s'agit de démontrer que $M = O$.

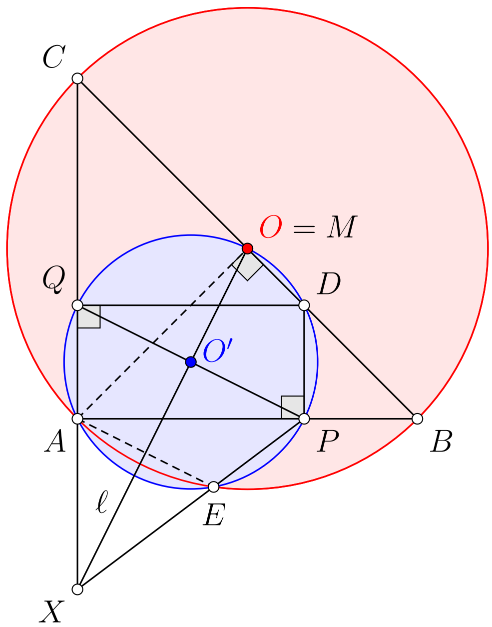
Comme PQX est isocèle en X, la symétrie d'axe ℓ échange les droites (AQ) et (PE), de sorte que $\widehat{AQP} = \widehat{QPE}$. Puisque A, E, P et Q sont cocycliques, le quadrilatère $AEPQ$ est donc un trapèze isocèle, ce qui se vérifie aisément puisque

$$(AE, PQ) = (AE, AQ) + (AQ, PQ) = (PE, PQ) + (QA, QP) = 0°.$$

La symétrie d'axe ℓ échange donc les points A et E, et ℓ est en fait la médiatrice de $[AE]$. Elle contient donc, en particulier, les centres O et O' des cercles circonscrits à ABC et $AEPQ$.

Au vu des angles droits en P, Q et M, ce dernier cercle est en fait le cercle de diamètre $[AD]$, et il contient D et M. En outre, (AM) est la bissectrice de $\widehat{BAC}$, donc M est le pôle Sud de A dans le triangle APQ, et PQM est isocèle en M. Ainsi, M appartient à ℓ.

En conclusion, M et O appartiennent tous deux à (AM) et à ℓ. Puisque $D \neq M$, on sait aussi que O', le milieu de $[AD]$, n'est pas sur (AM). Puisque ℓ contient O', elle n'est donc pas confondue avec (AM), et M coïncide donc avec O, ce qui conclut.



Commentaire des correcteurs L'exercice a été très bien réussi. Beaucoup d'élèves arrivent, par le développement d'idées simples comme une chasse aux angles, à avancer significativement dans la résolution du problème, quand certains autres forcent l'utilisation de résultats très avancés comme le théorème de Pascal ou de Desargues mais sans en obtenir des résultats conséquents.

Les figures fournies sont souvent très précises et il a été parfois frustrant de voir apparaître sur celles-ci que le milieu du segment $[BC]$ appartient au cercle passant par les points A, P et Q sans que l'élève n'évoque ce milieu dans sa tentative.

Nous avons noté une quantité significative de solutions erronées. Les erreurs sont souvent dues à l'utilisation d'une propriété manifeste sur la figure mais qui n'est pas encore démontrée. Bien souvent, pour éviter cet écueil, il est bon de se demander si toutes les hypothèses de l'énoncé ont été utilisées. Ainsi, plusieurs élèves croient avoir résolu l'exercice sans avoir utilisé ni que le triangle ABC est isocèle, ni que le point E appartient à son cercle circonscrit.

Exercice 7. Soit $n \geqslant 6$ un entier. On a disposé, dans le plan, n disques $D_1, D_2, \ldots, D_n$ deux à deux disjoints, de rayons $r_1 \geqslant r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_n$. Pour tout entier $i \leqslant n$, on considère un point P_i à l'intérieur du disque D_i. Enfin, soit A un point quelconque du plan. Démontrer que

$$AP_1 + AP_2 + \ldots + AP_n \geqslant r_6 + r_7 + \ldots + r_n.$$

Solution de l'exercice 7 Au vu d'un tel énoncé, et ne sachant pas nécessairement par où commencer, on souhaite utiliser une récurrence sur n. Dans ces conditions, il s'avère que la propriété clé de notre récurrence sera la suivante.

Lemme. Si $n = 6$, il existe un entier i tel que $AP_i \geqslant r_6$.

Démonstration. Soit O_i le centre du disque D_i. Si A coïncide avec l'un des points O_i, le résultat désiré est immédiat. Sinon, on trie les centres O_i dans le sens horaire autour de A. Ceux-ci définissent six angles de somme $360°$, donc l'un des angles, disons $\widehat{O_iAO_j}$, vaut au plus $60°$. Si l'on suppose sans perte de généralité que $AO_i \geqslant AO_j$, le théorème d'Al-Kashi indique alors que

$$\begin{aligned}(r_i + r_j)^2 \leqslant O_iO_j^2 = AO_i^2 + AO_j^2 - 2\cos(\widehat{O_iAO_j})AO_i \cdot AO_j \leqslant AO_i^2 - AO_i \cdot AO_j + AO_j^2 \\ \leqslant AO_i^2 \leqslant (AP_i + r_i)^2,\end{aligned}$$

de sorte que $AP_i \geqslant r_j \geqslant r_6$. □

On procède maintenant par récurrence sur n. Tout d'abord, si $n = 6$, le résultat de l'énoncé est un simple corollaire de notre lemme. Puis, si $n \geqslant 7$, on applique notre lemme aux disques $D_1, \ldots, D_6$. Il existe donc un entier $i \leqslant 6$ tel que $AP_i \geqslant r_6$. On supprime maintenant le disque D_i et on applique l'hypothèse de récurrence aux $n - 1$ disques restants, de sorte que

$$AP_i + \sum_{j \neq i} AP_j \geqslant r_6 + (r_7 + \ldots + r_n),$$

ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs Le problème proposé était très difficile, et il n'a été abordé que par une vingtaine d'élèves. Les correcteurs se sont émerveillés de constater que deux élèves l'avaient résolu avec brio.

De nombreux élèves ont tout d'abord formulé la remarque pertinente selon laquelle on pouvait toujours supposer que $AP_i = AO_i - r_i$ quand A n'appartient pas à D_i, où O_i est le centre du disque D_i. Toutefois, les correcteurs ont été surpris de découvrir des preuves parfois très compliquées pour ce résultat pourtant fort simple et géométriquement clair. Malheureusement, au vu de la difficulté de l'exercice, cette remarque ne rapportait aucun point, mais cela n'enlève rien à sa pertinence. La clé consistait donc à trouver un énoncé intermédiaire plus fort, dont on pourrait déduire la conclusion demandée.

Plusieurs élèves ont pensé à regarder le cas $n = 6$, ce qui était très bien, mais les deux seuls qui ont traité ce cas rigoureusement sont aussi les deux seuls à avoir conclu l'exercice. De manière générale, affirmer tout de go que « la pire situation est celle où les disques sont de même rayon et où leurs centres forment un hexagone régulier de centre A » repose sur une heuristique bienvenue, mais nullement prouvée, et il est clair que cette affirmation ne peut pas rapporter le moindre point tant qu'elle n'est pas étayée.

De même, plusieurs élèves ont cherché à démontrer que lorsque A n'appartient à aucun disque D_i, il existait un tel disque pour lequel $AP_i \geqslant r_i$. Cependant, il était facile de construire un contre-exemple à cette inégalité, par exemple si A et les points P_i et O_i sont alignés, avec $AO_i = 5^i$, $r_i = 3 \times 5^{i-1}$ et $AP_i = 2 \times 5^{i-1}$. De fait, lorsque l'on formule une idée de lemme, il est très important de rechercher des contre-exemples simples à ce lemme, qui seraient de nature à l'invalider, et ce dans le but de limiter le temps perdu à tenter de démontrer quelque chose de faux. Une telle phase permet souvent, à peu de frais, d'affiner la formulation du lemme, ou bien de se rendre compte que l'idée sous-jacente est complètement fausse ; quand elle n'aboutit pas, c'est-à-dire quand on n'a pas trouvé de contre-exemple, on a plus confiance dans le lemme, et c'est là aussi encourageant, donc positif.