Exercices autour de l'orthocentre

Exercice 1. Soit ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit. Soient H_B et H_C les pieds des hauteurs issues de B et C. Prouver que $(H_B H_C) \perp (AO)$.

Exercice 2. Soit ABC un triangle tel que $\widehat{ABC} = 60$. On note O le centre de son cercle circonscrit, H son orthocentre et D le pied de la hauteur issue de A. Montrer que O appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{DHC}$.

Exercice 3. Soit ℓ une droite quelconque passant par l'orthocentre du triangle ABC. Soit ℓ_A, ℓ_B et ℓ_C les symétriques de ℓ par rapport aux droites (BC), (CA) et (AB) respectivement. Montrer que les droites ℓ_A, ℓ_B et ℓ_C passent par un même point, et que ce point appartient au cercle circonscrit à ABC.

Exercice 4. (JBMO 2013) Soit ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit ω. Soit D un point du segment $[BC]$ tel que $\widehat{BAD} = \widehat{CAO}$. Soit E le second point d'intersection de la droite (AD) avec ω. On note respectivement M, N et P les milieux des segments $[BE]$, $[OD]$ et $[AC]$. Montrer que les points M, N et P sont alignés.

Exercice 5. Soit ABC un triangle d'orthocentre H. Soient M un point de $[AB]$ et N un point de $[AC]$. Les cercles de diamètre $[BN]$ et $[CM]$ se recoupent en X et Y respectivement. Montrer que H appartient à la droite (XY).

Exercice 6. Soit ABC un triangle acutangle. La hauteur issue de B dans ABC intersecte le cercle de diamètre (AC) en K et L, et la hauteur issue de C dans ABC intersecte le cercle de diamètre (AB) en M et N. Montrer que K, L, M et N sont cocycliques.

Exercice 7. (JBMO 2019) Soit ABC un triangle, avec $AB < AC$. La médiatrice de $[BC]$ recoupe les droites (AB) et (AC) en P et Q respectivement. Soient M et N les milieux des segments $[BC]$ et $[PQ]$, et soit H l'orthocentre de ABC. Montrer que les droites (HM) et (AN) s'intersectent sur le cercle circonscrit à ABC.

Exercices bonus

Exercice 8. Soient ABC un triangle et D l'intersection de la bissectrice intérieure issue de A avec $[BC]$. La médiatrice de $[AD]$ recoupe la bissectrice issue de B en M et celle issue de C en N. Montrer que les points A, D, M et N sont sur un même cercle.

Exercice 9. Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. On appelle respectivement I_A, I_B, I_C et I_D les centres des cercles inscrits des triangles BCD, DCA, ADB et BAC. Quelle est la nature du quadrilatère $I_A I_B I_C I_D$?

Exercice 10. Soient C_1 et C_2 deux cercles extérieurs l'un à l'autre, de centres respectifs O_1 et O_2. Une tangente commune extérieure est tangente à C_1 en A_1 et à C_2 en A_2, et une tangente commune intérieure est tangente à C_1 en B_1 et à C_2 en B_2. Montrer que les droites (A_1B_1), (A_2B_2) et (O_1O_2) sont concourantes.