

Equations fonctionnelles sur les entiers

Rémi – 24 avril 2021

1 Exercices

Exercice 1 (APMO 2019) Trouver tous les fonctions $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ telles que $a^2 + f(a)f(b)$ soit divisible par $f(a) + b$ pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 (BMO SL 2017, N2) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ telles que $xf(x) + f(y)^2 + 2xf(y)$ soit un carré parfait pour tous $x, y \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 (IMO SL 2011, N3) Soit n un entier positif impair. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ telles que $f(x) - f(y)$ divise $x^n - y^n$ pour tous entiers x, y .

Exercice 4 (Caucase 2020) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ telles que $f(m) + n - m$ soit divisible par $f(n)$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5 (IMO SL 2016, N6) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, $f(m) + f(n) - mn$ soit non nul et divise $mf(m) + nf(n)$.

2 Bonus

Exercice 6 (MEMO 2016) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ telles que $f(a) + f(b)$ divise $2(a + b - 1)$ pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7 (Centroamerican 2020) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ telles que pour tous entiers a, b, c tels que $a + b + c = 0$ on ait

$$f(a) + f(b) + f(c) = a^2 + b^2 + c^2.$$