TD Groupe C Géométrie — Cercle d'Euler et transformations du plan

Antoine Derimay

6 Mars 2021

L'idée est de résoudre les exercices sans les indications, mais ça ne sert à rien de rester bloqué pendant une demi-heure sans savoir vers où partir non plus...

Exercices

Exercice 0 Échauffement
Soit ABC un triangle, montrer que le symétrique de son orthocentre par rapport à un côté du triangle est sur son cercle circonscrit.
Retenez bien ce résultat pour le reste de ce TD :)

Pour ceux qui ont besoin d'une piqûre de rappel sur le cercle d'Euler...
https://www.mathraining.be/chapters/64?type=1&which=208

Exercice 1
On considère deux points B, C, ainsi qu'un point O sur la médiatrice de BC. Soit Γ le cercle de centre O passant par B et C. Montrer qu'il existe un cercle tel que peu importe la position d'un point A de Γ, le cercle d'Euler de ABC soit tangent à ce cercle.
Indication : quel est le milieu de OH, avec H l'orthocentre de ABC ?

Exercice 2
Soit ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit et D le pied de la hauteur issue de A de ABC. Soit S l'intersection du cercle circonscrit à AOD et du cercle d'Euler (qui n'est pas D), montrer que $SB = SC$.
Indication : Quelle homothétie envoie le cercle circonscrit de ABC sur son cercle d'Euler ?
Autre indication : Considérer la symétrie d'axe M_BM_C où M_B est le milieu du segment AC.

Exercice 3 (EGMO 2012)
Soit ABC un triangle, H son orthocentre et K un point sur l'arc BC ne contenant pas A de (ABC). On note L le symétrique de K par rapport à AB, et M celui par rapport à BC. (LBM) et (ABC) se rencontrent une deuxième fois en E. Montrer que les droites BC, EM, HK sont concourantes.
Indication : Considérer les symétriques de H par rapport à AB et BC, et essayer de montrer les alignements qui ont l'air d'être vrais.

Exercice 4
Soit ABC un triangle, H son orthocentre et O le centre de son cercle circonscrit. Soit M le milieu de BC, et N le milieu de AH. La droite perpendiculaire à AM passant par N coupe AM en K, et AO en L.
1) Montrer que K est sur le cercle d'Euler de ABC.
2)(a priori, pas de rapport avec la 1)) Montrer que B, C, K, L sont cocycliques.
Indication : Considérer T le point d'intersection de KL et BC, et montrer que $TB \times TC = TA^2 = TK \times TL$

Exercice 5 (Relation d'Euler)
Soit ABC un triangle, on note I le centre du cercle inscrit et O celui du cercle circonscrit. On note également X l'intersection de BI avec (ABC) et X' le point diamétralement opposé à X. Enfin,le cercle inscrit de ABC est tangent à BC en D.

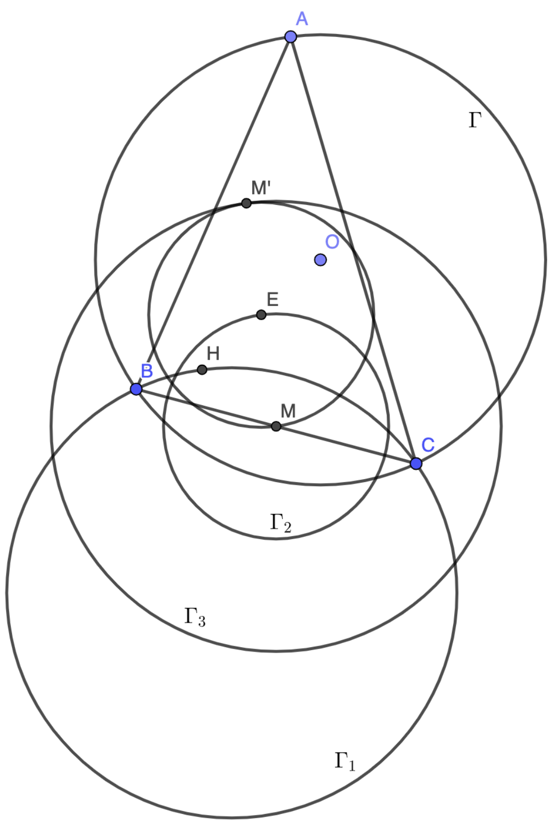
1) Montrer que BDI et $X'CX$ sont semblables.
2) Montrer que XIC est isocèle en X.
3) En déduire que $d^2 - R^2 = -2Rr$, où $d = OI$, R est le rayon du cercle circonscrit et r est le rayon du cercle inscrit. *C'est la relation d'Euler.*
4) En déduire que le cercle d'Euler de ABC est plus grand que son cercle inscrit.
En fait, le cercle inscrit est même tangent intérieurement au cercle d'Euler : c'est le théorème de Feuerbach.

Exercice 6
Soit ABC un triangle non isocèle en A, D le milieu de BC et E le pied de la hauteur issue de A. La médiatrice de DE et la perpendiculaire à la bissectrice intérieure de $\widehat{BAC}$ passant par D se coupent en P.
Montrer que P est sur le cercle d'Euler de ABC.
Indication : Montrer que XPD est isocèle, où X est le centre du cercle d'Euler, en calculant $\widehat{XPD}$, et $\widehat{PXD}$ en considérant l'homothétie de centre H et de rapport 2.

Correction

Solution de l'exercice 0
Considérons H' l'intersection de AH avec (ABC) qui n'est pas A, il suffit de montrer que BC est la médiatrice de HH'.
On a $\widehat{H'BC} = \widehat{H'AC} = 90 - \widehat{ACB}$, et $\widehat{HBC} = 90 - \widehat{ACB}$, et on a fini.

Solution de l'exercice 1
Si on pose Γ_1 le symétrique de Γ par rapport à BC, l'exercice 0 nous donne que H reste sur Γ_1 quand A varie. Par ailleurs, si O_1 désigne le centre de Γ_1, le milieu de OO_1 est M le milieu de BC. Ensuite, si Γ_2 désigne l'image de Γ_1 par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$, comme E le centre du cercle d'Euler est le milieu de OH, E reste sur Γ_2 lorsque A varie. Enfin, comme M est le centre de Γ_2, si Γ_3 désigne l'image de Γ_2 par l'homothétie de centre M et de rapport 2, M' le point diamétralement opposé à M sur le cercle d'Euler est également sur Γ_3, et comme M, E, M' sont alignés, M' est bien un point de tangence.

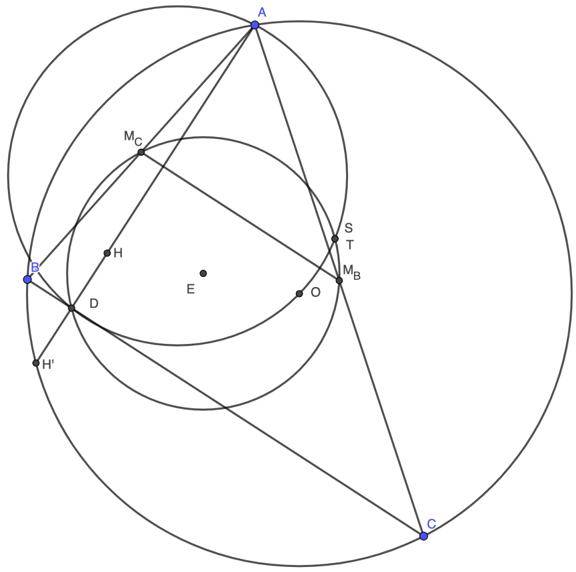


Solution de l'exercice 2

On veut montrer que S est sur la médiatrice de BC, donc que OS est la médiatrice de BC. Pour cela, il suffit de montrer que OS est perpendiculaire à BC, ou encore à M_BM_C, où M_B est le milieu de AC.

On va en fait montrer que M_BM_C est la médiatrice de OS.

Considérons h l'homothétie habituelle, de centre le centre de gravité et de rapport $-\frac{1}{2}$. Elle envoie H sur O, et BC sur M_BM_C. De plus, si H' est le symétrique de H par rapport à BC, $H' \in (ABC)$, donc $T = h(H')$ est sur le cercle d'Euler de ABC et est le symétrique de $O = h(H)$ par rapport à $M_BM_C = h(BC)$. Par ailleurs, M_BM_C est la médiatrice de AD car elle passe par son milieu (Thalès) et lui est perpendiculaire. Ainsi, le centre de (ADO) est sur M_BM_C : (ADO) est laissé invariant par la symétrie d'axe M_BM_C. Comme T est le symétrique de O par rapport à M_BM_C et que $O \in (ADO)$, $T \in (ADO)$: $T = S$ et on a fini.



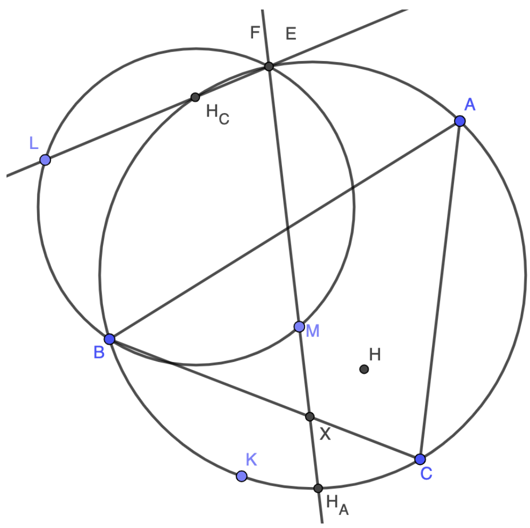
Solution de l'exercice 3

Notons comme le suggère l'indication H_A le symétrique de H par rapport à BC, et H_C le symétrique de H par rapport à AB. Ils sont sur (ABC) par l'exercice 0. Remarquons que MH_A est le symétrique de KH par rapport à BC, donc leur intersection sera sur BC, il suffit donc de montrer que M, E, H_A sont alignés.

Posons donc F la deuxième intersection de MH_A avec (ABC), et on va montrer que $E = F$.

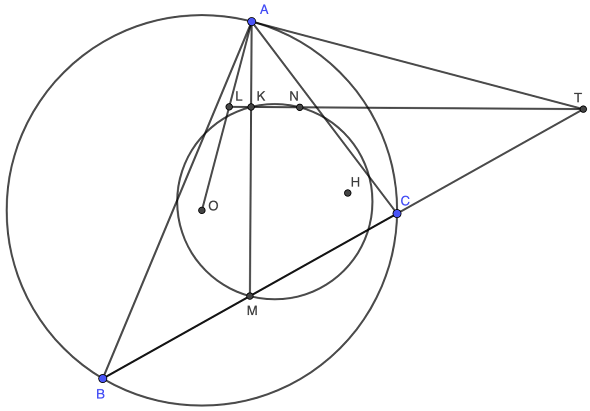
Tout d'abord, $\widehat{LH_CB} = \widehat{BHK} = \widehat{BH_AM} = \widehat{BH_AF} = 180 - \widehat{BH_CF}$, donc L, H_C, F sont alignés.

Ensuite, on a $\widehat{LFM} = \widehat{H_CFH_A} = 180 - \widehat{H_CBH_A} = 180 - (\widehat{H_CBH} + \widehat{HBH_A}) = 180 - 2\widehat{ABC}$. Aussi, on a $\widehat{LBM} = \widehat{LBK} - \widehat{KBM} = 2(\widehat{ABK} - \widehat{KBC}) = 2\widehat{ABC}$. Ainsi $BLFM$ est cyclique, $E = F$ et on a fini.



Solution de l'exercice 4
1) Le cercle circonscrit à NKM est le cercle de diamètre NM, mais on sait que celui-ci est le cercle d'Euler !

2) Notons donc $T = KL \cap BC$, et montrons que TA est tangente à ABC.
On a $MA \perp NT$ et $AN \perp MT$, donc N est l'orthocentre de MAT, et $MN \perp AT$. De plus, l'homothétie de centre le centre de gravité et de rapport $-\frac{1}{2}$ envoie HA sur OM, donc $2OM = HA$, puis $OM = NA$. Comme $OM//NA$, on en déduit que $AOMN$ est un parallélogramme, en particulier, $AO//NM$, et donc $AO \perp AT$, AT est tangente à (ABC).
Par puissance d'un point, $AT^2 = TB \times TC$.
De plus, les triangles LAT et AKT sont semblables, donc $AT^2 = AK \times AL$.
Enfin, on en déduit que TCL et TKB sont semblables (un angle en commun et une égalité de rapports de longueurs), donc $\widehat{TCL} = \widehat{TKB}$, puis $\widehat{LCB} = \widehat{LKB}$, et C, K, L, B sont cocycliques, comme voulu.



Solution de l'exercice 5
Voir `https://www.mathraining.be/chapters/32?type=1&which=113`.
Pour la 4), le cercle d'Euler est l'image du cercle circonscrit par une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$, donc son rayon est $\frac{R}{2}$.

Solution de l'exercice 6
Notons X le centre du cercle d'Euler et I le centre du cercle inscrit, on a $\widehat{XPD} = 90 - \widehat{IAH} = 90 - (\widehat{BAI} - \widehat{HAB}) = 180 - \frac{\widehat{BAC}}{2} - \widehat{ABC} = 90 - \frac{1}{2}(\widehat{ACB} - \widehat{ABC})$ car $AH//XP$.
Aussi, si h dénote l'homothétie de centre H et de rapport $\frac{1}{2}$, on a vu que $h(X) = O, h(D) = A'$ le point diamétralement opposé à A sur ABC, et $h(E) = F$ le symétrique de H par rapport à BC. Alors par angle au centre, on a $\widehat{EXD} = \widehat{FOA'} = 2\widehat{FAA'} = 2\widehat{HAO} = 2(\widehat{HAC} - \widehat{OAC}) = 2(\widehat{ACB} - \widehat{ABC})$.
Comme XP est la médiatrice de DE, on a $\widehat{PXD} = \frac{1}{2}\widehat{EXD} = \widehat{ACB} - \widehat{ABC}$, et XPD est donc bien isocèle, et on a fini.