1 Homothétie

Exercice 1 Montrez que les symétriques d'un point P par rapport aux milieux des côtés d'un carré forment un carré.

Exercice 2 Soit ABC un triangle. Construisez un carré $DEFH$ tel que $D, E \in [BC]$, $F \in [CA]$ et $G \in [AB]$.

Exercice 3 Soit $ABCD$ un trapèze avec $(AB) \parallel (CD)$, M le milieu de $[AB]$, P un point de (BC). On nomme X l'intersection de (PD) et (AB), Q celle de (PM) et (AC), et Y celle de (DQ) et (AB). Montrer que M est le milieu de $[XY]$.

Exercice 4 Soit Γ et Γ_0 deux cercles tangents, Γ_0 étant à l'intérieur de Γ. Soit T le point de tangence des deux cercles, B un autre point de Γ_0 , et M, N les points d'intersection de la tangente à Γ_0 en B avec Γ. Montrer que $\widehat{BTM} = \widehat{BTN}$.

Exercice 5 Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit, et Γ_A un cercle à l'intérieur de celui-ci, tangent à $(AB), (AC)$ et à Γ_A en un point A_0 . On définit de même B_0 et C_0 . Montrer que $(AA_0), (BB_0)$ et (CC_0) sont concourantes.

Exercice 6 Soit ABC un triangle avec $\widehat{BAC} = 60°$. Soient D et E les projetés orthogonaux de A sur les bissectrices extérieure issues de $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ respectivement. On note O le centre du cercle circonscrit de ABC. Montrez que les cercles circonscrit aux triangles ADE et BOC sont tangents.

2 Similitude Directe

Exercice 7 Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Γ. Soit N le milieu de l'arc BC contenant A et C un cercle passant par A et N, qui coupe $[AB]$ (resp. $[AC]$) en X (resp. Y). Montrer que $BX = CY$.

Exercice 8 Soit $ABCD$ un quadrilatère, E et F sur $[AD]$ et $[BC]$ respectivement tels que $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$. Soit $S = (EF) \cap (AB)$ et $T = (EF) \cap (CD)$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles SAE, SBF, TCF et TDE sont concourants.

Exercice 9 Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles s'intersectant en P et Q. Soit A et B deux points variables sur Γ_1 et A' et B' les deuxièmes points d'intersection de Γ_2 avec (AP) et (BP) respectivement. Soit $C = (AB) \cap (A'B')$. Montrer que le centre O du cercle circonscrit au triangle CAA' reste sur un cercle fixe quand A et A' varient.

Exercice 10 Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle de centre O, P le point d'intersection de (AB) et (CD), Q le deuxième point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles APD et BPC. Montrer que $\widehat{OQP} = 90°$.

Exercice 11 Soit $ABCDE$ un pentagone convexe vérifiant les relations suivantes $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAE}$ et $\widehat{CBA} = \widehat{DCA} = \widehat{EDA}$. Soit $P = (BD) \cap (CE)$. Montrer que la droite (AP) coupe le segment $[CD]$ en son milieu.

Exercice 12 Soit ABC un triangle et A_1, B_1, C_1 les symétriques de respectivement A, B, C par rapport aux côtés opposés. On note A' l'intersection des cercles circonscrits de ABB_1 et ACC_1. On définit B', C' de manière analogue. Montrer que (AA'),(BB'),(CC') sont concourantes.

3 Symétrie

Exercice 13 On considère une rivière droite de largeur L et deux points A et B de part et d'autre de cette rivière. On veut construire un pont perpendiculaire à la rivière. Où le construire pour que le trajet de A à B soit le moins long possible ?

Exercice 14 Le point M est situé sur le diamètre $[AB]$ du cercle C. La corde $[CD]$ intersecte (AB) en M sous un angle de $45°$. Montrer que la somme $CM^2 + DM^2$ ne dépend pas du choix de M.

Exercice 15 Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit ω. Le cercle passant par B tangent à AI en I intersecte (AB) une seconde fois en P. Le cercle passant par C tangent à AI en I intersecte (AC) une seconde fois en Q. Montrer que PQ est tangent à ω.

4 Rotation

Exercice 16 Soit ABC un triangle équilatéral, M un point de son cercle circonscrit sur l'arc (BC) ne contenant pas A. Montrer que $MB + MC = MA$.

Exercice 17 Soit ABC un triangle isocèle en C. P est un point sur le cercle circonscrit de ABC situé du côté opposé de C par rapport à $[AB]$, et D est le projeté orthogonal de C sur (PB). Montrer que $PA + PB = 2 \cdot PD$.

Exercice 18 . $[AB]$ est le diamètre d'un cercle et C est le milieu d'un des demi-arc AB. Soit P un point de l'autre demi-arc et X, Y les projetés orthogonaux de A et B sur (CP) respectivement. Montrer que $AX + BY = CP$.

Exercice 1 (Point de Fermat) Soit ABC un triangle dont les angles sont inférieurs à $120°$ degrés. Montrer qu'il existe un unique point F à l'intérieur de ABC tel que $\widehat{AFB} = \widehat{BFC} = \widehat{CFA} = 120°$. Montrer alors que pour tout X à l'intérieur de ABC, $AX + BX + CX \geqslant AF + BF + CF$.