Géométrie groupe A : Puissance d'un point

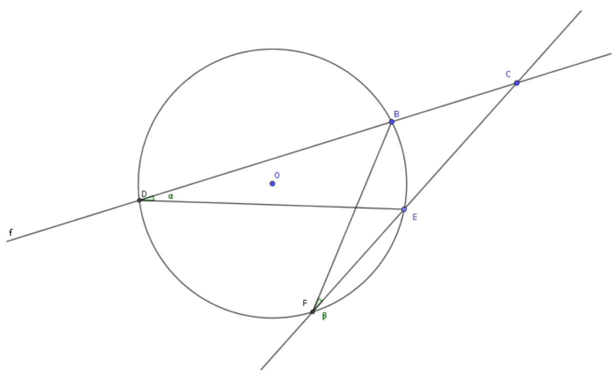
13 mars 2021

1 Cours

Définition 1. *(Puissance d'un point)* La puissance du point C par raport au cercle est la valeur

$$CB \times CD = CF \times CE = OC^2 - r^2$$

où O est le centre du cercle et r le rayon. Elle ne dépend pas de la droite choisie.



Démonstration. $\widehat{EDC} = \widehat{CFB}$ car les points E, F, B, D sont cocycliques. Puisqu'ils partagent le même angle en C, les triangles FBC et EDC sont semblables. Conclusion

$$\frac{BC}{FC} = \frac{CE}{CD} \Rightarrow BC \times CD = FC \times CE.$$

Cette valeur est donc identique pour toutes les droites passant par C coupant le cercle.

Dans le cas limite où la droite est tangeante au cercle en E alors la puissance du point est égale à CE^2. Ici $OE \perp EC$. Par le théorème de Pythagore, $OE^2 + EC^2 = OC^2$, $OE^2 = r^2$. La puissance du point est donc aussi égale à

$$CE^2 = OC^2 - r^2.$$

$\square$

Remarque 1. La puissance du point est nulle quand le point est sur le cercle.

On a la réciproque de la puissance d'un point

Proposition 1. *Soit* 5 *points* C, B, D, E *et* F *tel que*

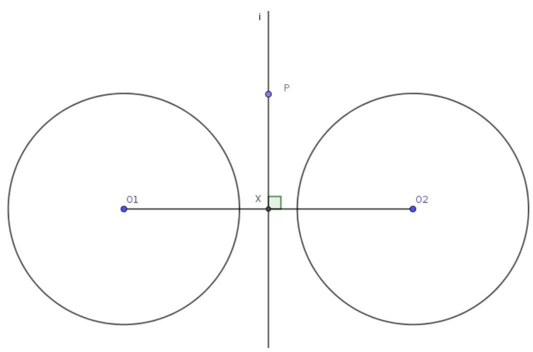
$$BC \times CD = FC \times CE$$

alors les points B, D, F, E *sont cocycliques.*

Dans plusieurs exercices, le jeu est comme pour la chasse aux angles de faire une chasse « à la puissance » pour montrer que des points sont cocycliques.

Définition 2. *(Axes radicaux)* Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles. L'axe radical est l'ensemble des points tel que la puissance du point par rapport au premier cercle est égale à la puissance du point par rapport au deuxième cercle.

Proposition 2. *L'axe radical est une droite perpendiculaire au segment qui lie les centre des deux cercles.*

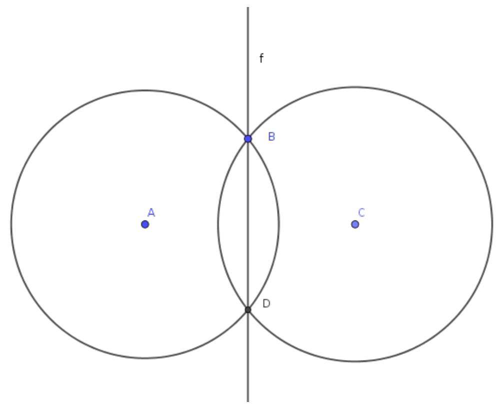


Démonstration. Soit X sur O_1O_2 tel que la puissance de X sur le premier cercle $(O_1X^2 - R^2)$ est égale à la puissance sur le second cercle $O_2X^2 - r^2$. Soit P sur la droite perpendiculaire à (O_1O_2) passant par X. On a alors

$$O_1P^2 - R^2 = O_1X^2 + XP^2 - R^2 = XP^2 + O_2X^2 - r^2 = O_2P^2 - r^2.$$

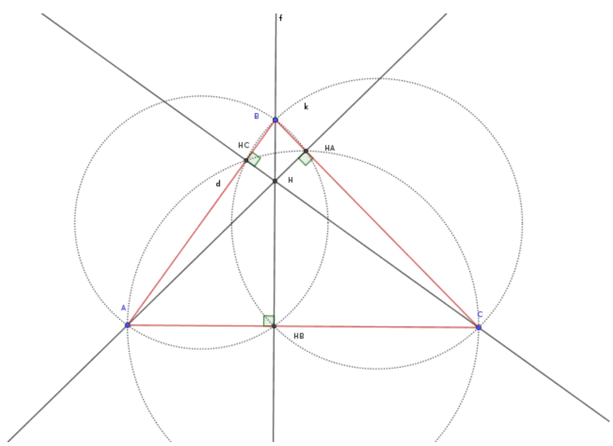
La puissance de P par rapport au premier cercle est bien égale à la puissance par rapport au deuxième cercle. □

Proposition 3. *Si les deux cercles se coupent en* B *et* D *alors l'axe radical est égale à* (BD).



Démonstration. Ici la puissance de B égale à 0 pour le premier cercle et pour le deuxième cercle. Donc B appartient à l'axe radical. Même chose pour D, D appartient à l'axe radical. □

Théorème 1. (orthocentre) *Les hauteurs d'un triangles se coupent en un point.*



Démonstration. On trace les trois cercles Γ_1, Γ_2 et Γ_3 de diamètre respectivement AB, BC et AC. Et on note H_A, H_B et H_C les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B et C. Puisque $AH_A \perp H_AB$, H_A appartient à Γ_1. (Dans un triangle rectangle le diamètre du cercle circonscrit est égale à l'hypothénus.). Même chose pour les autres cercles Γ_2, Γ_3 et les autres points H_B, H_C. On a alors que

— $H_A \in \Gamma_1$ et $H_A \in \Gamma_3$,
— $H_B \in \Gamma_1$ et $H_B \in \Gamma_2$,
— $H_C \in \Gamma_2$ et $H_C \in \Gamma_3$,

On en déduit alors que

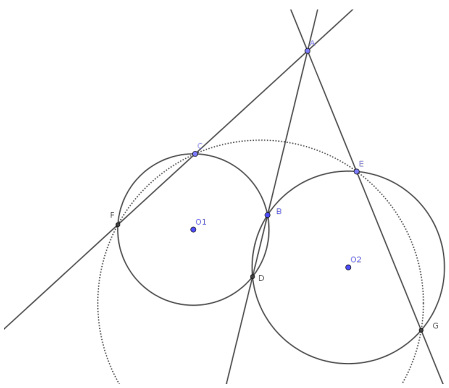
— L'axe radicale des cercles Γ_1 et Γ_3 est égale à (AH_A).
— L'axe radicale des cercles Γ_1 et Γ_2 est égale à (BH_B).

— L'axe radicale des cercles Γ_2 et Γ_3 est égale à (CH_C).
« Les hauteurs sont les axes radicaux associés aux cercles dont les diamètres sont les cotés du triangles. »

On note H l'intersection entre (AH_A) et (BH_B). Alors la puissance de H par rapport à Γ_1 est égale à la puissance de H par rapport à Γ_2 qui est égale à la puissance de H par rapport à Γ_3 . On en déduit que H appartient également à l'axe radical de Γ_2 et Γ_3.

Conclusion les trois hauteurs $(AH_A), (BH_B)$ et (CH_C) se coupent en H. □

Proposition 4. *(Des quadrilatères.)Soit F, C, B, D et D, B, E, G des quadrilatères inclus dans des cercles. Les droites $(FC), (BD)$ et (EG) se coupent un même point (ou sont parallèles) si et seulement si les points F, C, E, G sont cocycliques.*



Démonstration. Supposons que les droites se coupent un point A. Puisque la puissance en A pour le premier cercle ne dépend pas de la droite on a que

$$AC \times AF = AB \times AD.$$

De même pour le deuxième cercle :

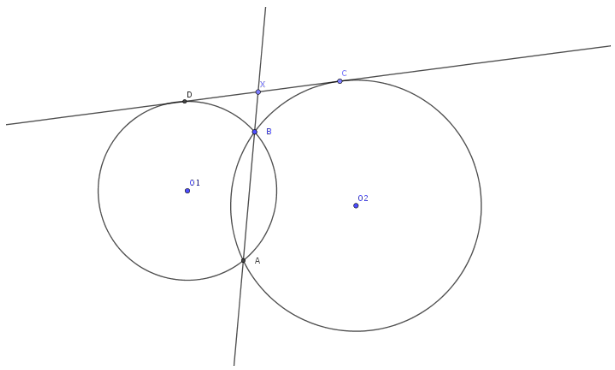
$$AB \times AD = AE \times AG.$$

Conclusion $AC \times AF = AE \times AG$ et donc (par la réciproque de la puissance d'un point) les points C, F, E, G sont cocycliques. □

Remarquer que dans la preuveu précédente on aurait pu aller plus vite en disant que A appartient à l'axe radical des deux cercle et donc la puissance de A par rapport à chacun des cercles sont égaux : $AC \times AF = AE \times AG$.

2 Exercices

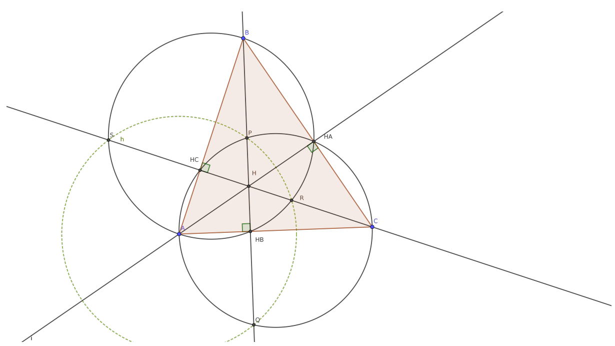
Exercice 1. Deux cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en A et B. Une tangente commune à ces deux cercles les coupe respectivement en C et D. Montrer que (AB) coupe $[CD]$ en son milieu.



Solution 1. La puissance de X par rapport à $\Gamma_1 = XD^2$ car (XD) est tangeant à Γ_1. De même la puissance de X par rapport à $\Gamma_2 = XC^2$ car (XC) est tangeant à Γ_2. Puisque X est sur l'axe radical de Γ_1,Γ_2 les puissances sont égales. Conclusion

$$XC^2 = XD^2.$$

Exercice 2. Soit ABC un triangle acutangle. La perpendiculaire à (AC) passant par B coupe le cercle de diamètre [AC] en P et Q, et la droite perpendiculaire à (AB) passant par C coupe le cercle de diamètre [AB] en R et S. Montrons que P, Q, R, S sont cocycliques.



Solution 2. On a appris que l'orthocentre H est le points d'intersections des axes radicaux des cercles de diamètre AB, AC et BC. Les puissance de H par rapport à chacun de ces cercles sont donc égales. En particulier

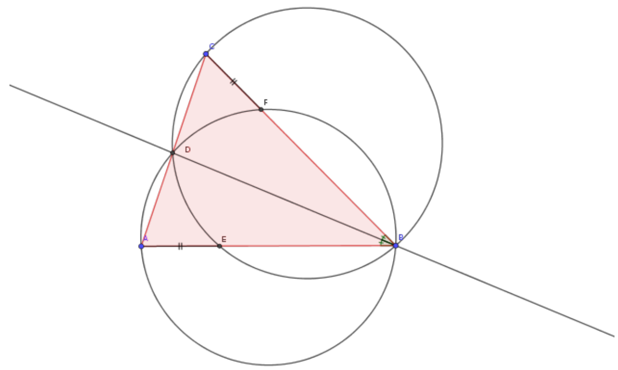
$$HP \times HQ = HR \times RS$$

et donc les points R, S, P, Q sont cocycliques (par la réciproque de la puissance d'un point).

Exercice 3. Soit ABC un triangle et D le pied de la bissectrice issue de B. On note E le second point d'intersection du cercle circonscrit du triangle de BDC avec (AB) et F le second point d'intersection du cercle circonscrit du triangle ABD avec (BC). Montrons que AE = CF.

Indication : On pourra utiliser la propriété des bissectrices :

$$\frac{DA}{AB} = \frac{DC}{CB} \Rightarrow AD \times CB = AB \times DC.$$



Solution 3. On calcule la puissance de A par rapport à Γ_2 de deux manières différentes

$$AE \times AB = AD \times AC$$

Même chose pour la puissance de C par rapport à Γ_1

$$CF \times CB = CD \times CA.$$

Alors

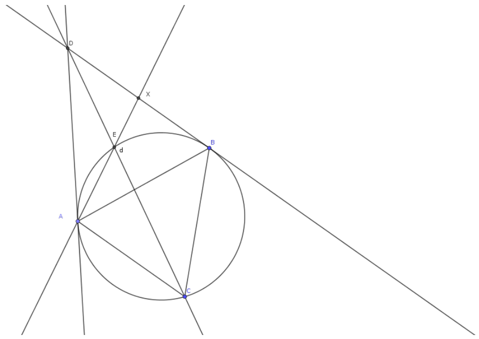
$$\frac{AE}{CF} = \frac{AD \times AC}{AB} \times \frac{CB}{CD \times CA} = \frac{AD \times CB}{AB \times CD} = 1$$

où on a utiliser la propriété de la bissectrice de l'énoncé. Conclusion $AE = CF$.

Exercice 4. Soit ABC un triangle, et H son orthocentre. Soit M un point de (CA), et N un point de (AB). Les cercles de diamètres [BM] et [CN] se coupent en P et Q. Montrer que P, Q et H sont alignés.

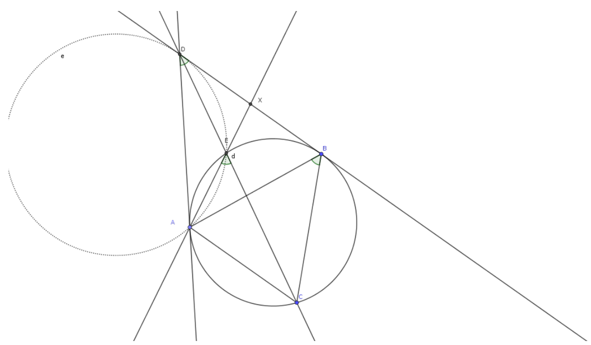
Solution 4. .

Exercice 5. Soit ABC un triangle isocèle en B. Les tangentes en A et B au cercle circonscrit Γ de ABC se coupent en D. Soit E le second point d'intersection de (DC) avec Γ . Prouver que (AE) coupe [DB] en son milieu.



Solution 5. Avec une chasse aux angles, on va montrer que BD est tangeant au cercle passant par D, E, A. Puisque A, E, B, C sont cocycliques, $\widehat{AEC} = \widehat{ABC}$. Puisque D est l'intersection des tangeantes ADB est un triangle isocèle. Donc $\widehat{DBA} = \frac{1}{2}(180 - \widehat{ADB}) = 90 - \frac{1}{2}\widehat{ABC}$. Donc $\widehat{ADB} = \widehat{ABC}$. Conclusion $\widehat{ADE} = \widehat{AEC}$ et alors (DB) tangeant au cercle ADE.

Maintenant X est sur l'axe radiale des cercles ABC et AED. Donc la puissance de X par rapport au premier cercle $= XB^{2}$ est égale à la puissance par rapport au deuxième cercle $= XD^2$. Donc $XD = XB$.



Exercice 6. : Un cercle coupe les trois côtés [AB], [BC] et [CA] d'un triangle équilatéral ABC chacun en deux points, comme sur la figure ci-dessous. Montrer que la somme des longueurs des trois segments en gras est égale à la somme des trois segments en pointillés.

Exercice 7. Soient A, B, C et D quatre points distincts alignés dans cet ordre. Soient Γ1 et Γ2 Les cercles de diamètres respectifs [AC] et [BD], qui s'intersectent en X et Y . On considère O un point arbitraire sur (XY) qui ne soit pas sur la droite originelle. (CO) recoupe Γ1 en M, (BO) recoupe Γ2 en N. Montrer que (AM),(DN) et (XY) sont concourantes.