PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 14 ET DU 21 FÉVRIER 2021

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2006 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2005 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- Le **groupe EGMO** est constitué des élèves nées en 2005 ou avant et éligibles à l'EGMO.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 8 à 10.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire (au moins) une figure pertinente sur une feuille séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, si l'on souhaite démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.
- Si l'élève ne respecte pas la consigne précédente, il perdra automatiquement un point à l'exercice concerné (on ne donne pas de note strictement négative).

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Problèmes Junior

Exercice 1. Soit a, b, c et d quatre nombres réels. On suppose qu'il existe une permutation (x, y, z, t) des nombres a, b, c et d telle que

$$x \leqslant 2a - b, \; y \leqslant 2b - c, \; z \leqslant 2c - d \text{ et } t \leqslant 2d - a.$$

Démontrer que $a = b = c = d$.

Solution de l'exercice 1 Pour mieux exploiter la première inégalité, que l'on réécrit comme $x+b \leqslant 2a$, l'idéal serait que x et b soient maximaux, ou bien que a soit minimal. Évidemment, il se pourrait très bien que ni a, ni b, ni x ne soit extrémal. Néanmoins, puisque les variables jouent des rôles cycliques, on peut tout de même espérer, au choix, que a soit minimal, ou que b soit maximal, ou que x soit maximal.

Cependant, espérer que b et x seraient simultanément maximaux serait trop demander. À la place, on se contente de supposer, sans perte de généralité, que a est le plus petit des quatre nombres réels. Dans ces conditions, $2a \leqslant b + x \leqslant 2a$, donc $a = b$. Mais alors b est aussi le plus petit des quatre nombres réels, donc $b = c$, et on démontre de même que $c = d$.

Solution alternative n°1 En sommant les quatre inégalités de l'énoncé, on obtient l'inégalité $x+y+z+t \leqslant a+b+c+d$. Puisque (x, y, z, t) est une permutation de (a, b, c, d), cette dernière inégalité est en fait une égalité, donc chacune des inégalités de l'énoncé est également une égalité : $x = 2a - b$, $y = 2b - c$, $z = 2c - d$ et $t = 2d - a$.

En élevant chaque membre au carré et en additionnant les égalités ainsi obtenues, on constate alors que

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 5(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 4(ab + bc + cd + da).$$

Cela signifie que $ab + bc + cd + da = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, ou encore que

$$0 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 2(ab + bc + cd + da) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - a)^2,$$

de sorte que $a = b = c = d$.

Solution alternative n°2 Une autre manière de conclure consiste à remarquer que l'égalité $ab+bc+cd+da = a^2+b^2+c^2+d^2$ est un cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui n'est atteint que si les quadruplets (a, b, c, d) et (b, c, d, a) sont proportionnels l'un à l'autre. Puisque ceux-ci sont de même somme, ils sont donc égaux, ce qui conclut en effet.

Solution alternative n°3 Une autre variante des deux solutions précédentes est la suivante : quitte à soustraire un réel λ suffisamment grand à tous nos nombres, on suppose que chaque membre de chaque inégalité est négatif. En élevant ces membres au carré et en additionnant les inégalités ainsi obtenues, on constate alors que

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geqslant 5(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 4(ab + bc + cd + da).$$

Cela signifie une fois de plus que $ab + bc + cd + da \geqslant a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, et l'on conclut alors comme précédemment.

Solution alternative n°4 On procède de manière brutale, étudiant séparément chacune des $4! = 24$ permutations (x, y, z, t) possibles. Dans chaque cas, nous allons exprimer les nombres $a - b$, $b - c$, $c - d$ et $d - a$ comme combinaisons linéaires, à coefficients positifs, des nombres $\alpha = (2a - b - x)/60$, $\beta = (2b - c - y)/60$, $\gamma = (2c - d - z)/60$ et $\delta = (2d - a - t)/60$; les dénominateurs ont été choisis *a posteriori* pour que tous nos coefficients soient entiers. Cela démontrera qu'il s'agit de nombres positifs ou nuls, et puisque leur somme vaut 0, on en conclura que $a = b = c = d$.

Cependant, que l'on ne se méprenne pas ! Nous présentons cette solution dans le seul but de le convaincre le lecteur que, si celle-ci est théoriquement faisable dans le temps imparti des quatre heures de l'épreuve, elle est très risquée, et intellectuellement très peu satisfaisante. En outre, on serait bien en peine d'appliquer une telle méthode si on avait 2021 variables plutôt que quatre. Pour information, les correcteurs ont eu besoin d'un programme informatique pour écrire les cases de ce tableau, qu'ils n'ont pas eu le courage de calculer à la main après y avoir passé plus de deux heures.

Cas	(x,y,z,t)	$a-b$	$b-c$	$c-d$	$d-a$
1	(a,b,c,d)	60α	60β	60γ	60δ
2	(a,b,d,c)	60α	60β	30γ	$30\gamma + 60\delta$
3	(a,c,b,d)	60α	30β	$30\beta + 60\gamma$	60δ
4	(a,c,d,b)	60α	30β	30γ	$30\beta + 30\gamma + 60\delta$
5	(a,d,b,c)	60α	$20\alpha + 40\beta + 20\delta$	$20\beta + 40\gamma$	$20\beta + 40\gamma + 60\delta$
6	(a,d,c,b)	60α	$30\alpha + 60\beta + 30\delta$	60γ	$30\beta + 30\gamma + 60\delta$
7	(b,a,c,d)	30α	$30\alpha + 60\beta$	60γ	60δ
8	(b,a,d,c)	30α	$30\alpha + 60\beta$	30γ	$30\gamma + 60\delta$
9	(b,c,a,d)	30α	30β	$30\alpha + 30\beta + 60\gamma$	60δ
10	(b,c,d,a)	30α	30β	30γ	30δ
11	(b,d,a,c)	30α	$10\alpha + 40\beta + 20\delta$	$20\alpha + 20\beta + 40\gamma$	$30\alpha + 20\gamma + 40\delta$
12	(b,d,c,a)	30α	$30\alpha + 60\beta + 30\delta$	60γ	30δ
13	(c,a,b,d)	$40\alpha + 20\gamma + 20\delta$	$20\alpha + 40\beta$	$20\alpha + 40\beta + 60\gamma$	60δ
14	(c,a,d,b)	$40\alpha + 20\gamma + 20\delta$	$20\alpha + 40\beta$	30γ	$20\beta + 10\gamma + 40\delta$
15	(c,b,a,d)	$60\alpha + 30\gamma + 30\delta$	60β	$30\alpha + 30\beta + 60\gamma$	60δ
16	(c,b,d,a)	$60\alpha + 30\gamma + 30\delta$	60β	30γ	30δ
17	(c,d,a,b)	$48\alpha + 24\gamma + 12\delta$	$12\alpha + 48\beta + 24\delta$	$24\alpha + 12\beta + 48\delta$	$24\beta + 12\gamma + 48\delta$
18	(c,d,b,a)	$40\alpha + 20\gamma + 10\delta$	$20\alpha + 40\beta + 20\delta$	$20\beta + 40\gamma$	30δ
19	(d,a,b,c)	$45\alpha + 15\gamma + 30\delta$	$30\alpha + 45\beta + 15\delta$	$15\alpha + 30\beta + 45\gamma$	$15\beta + 30\gamma + 45\delta$
20	(d,a,c,b)	$40\alpha + 20\delta$	$40\alpha + 60\beta + 20\delta$	60γ	$20\beta + 20\gamma + 40\delta$
21	(d,b,a,c)	$60\alpha + 20\gamma + 40\delta$	60β	$20\alpha + 20\beta + 40\gamma$	$20\gamma + 40\delta$
22	(d,b,c,a)	$60\alpha + 30\delta$	60β	60γ	30δ
23	(d,c,a,b)	$40\alpha + 20\delta$	30β	$20\alpha + 10\beta + 40\gamma$	$20\beta + 20\gamma + 40\delta$
24	(d,c,b,a)	$60\alpha + 30\delta$	30β	$30\beta + 60\gamma$	30δ

Remarque : Les paires de variables (a,x), (b,y), (c,z) et (d,t) jouent des rôles cycliques. Dans la solution précédente, il est donc possible de traiter plusieurs permutations d'un coup. Par exemple, les cas où $(x,y,z,t) = (a,b,d,c)$ et $(y,z,t,x) = (b,c,a,d)$ se traitent de la même manière, puisque traiter la seconde permutation revient à traiter la première, mais en remplaçant respectivement les nombres α, β, γ et δ par β, γ, δ et β. Plus généralement, si on note σ la fonction telle que $\sigma(a) = b$, $\sigma(b) = c$, $\sigma(c) = d$ et $\sigma(d) = a$, chaque permutation (x,y,z,t) se traite de la même manière que la permutation $(\sigma(t), \sigma(x), \sigma(y), \sigma(z))$.

Cette observation permet de regrouper les cas

▷ 2, 22, 7 et 3,

▷ 4, 16, 12 et 9,

- ▷ 5, 21, 20 et 13,
- ▷ 6 et 15,
- ▷ 8 et 24,
- ▷ 11, 23, 14 et 18,

et donc de n'étudier « que » 10 permutations plutôt que 24 (par exemple les permutations sur fond gris), ce qui permet d'obtenir une solution horrible plutôt qu'inhumaine.

Remarque : Alternativement, et au vu du rôle cyclique de nos variables, il est en fait suffisant de démontrer l'inégalité $a \geqslant b$ pour chaque permutation (x, y, z, t), pour en déduire ensuite les inégalités analogues $b \geqslant c$, $c \geqslant d$ et $d \geqslant a$. Une telle approche, si elle ne permet plus le regroupement mentionné à la remarque précédente, nous permet de nous concentrer sur la première colonne du tableau.
De surcroît, puisque $a - b = 60\alpha$ lorsque $x = a$, et $a - b = 30\alpha$ lorsque $x = b$, il suffit en fait d'étudier que les 12 permutations pour lesquelles $x = c$ ou $x = d$, soit 12 cases sur les $24 \times 4 = 96$ cases du tableau. Certains cas restent cependant particulièrement pénibles à traiter, par exemple le cas 17.

Commentaire des correcteurs Relativement peu d'élèves ont obtenu tous les points sur le problème. Plusieurs approches étaient possibles. La stratégie la plus risquée consistait à tester les 24 cas possibles, éventuellement en invoquant des arguments de symétrie pour se débarrasser de certains cas. Parmi les élèves qui ont tenté cette approche, très peu en sont arrivés à bout. Voici quelques remarques générales à la suite de la lecture des tentatives proposées :

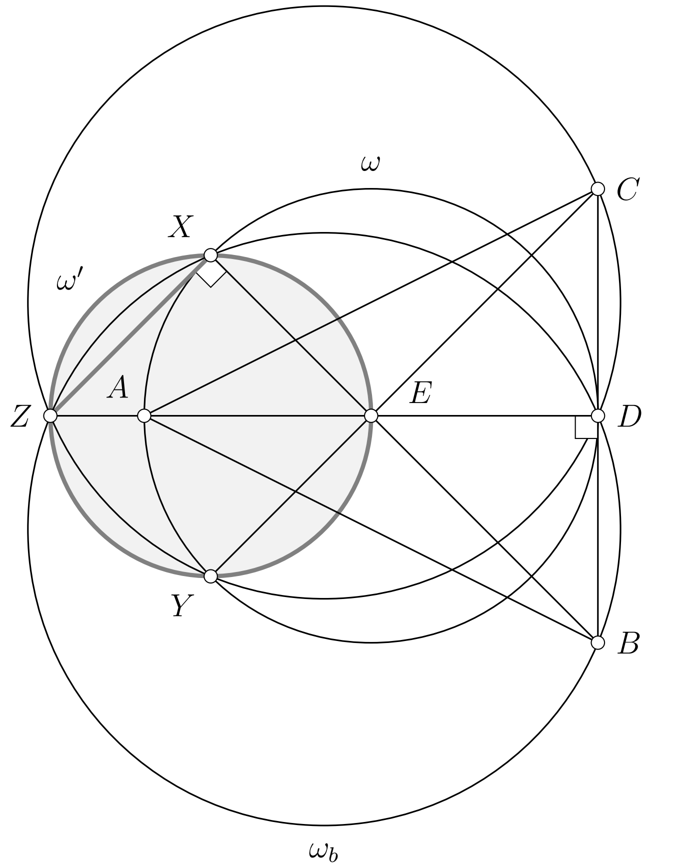
- ▷ De nombreux élèves ont pensé à sommer les inégalités pour montrer qu'il s'agissait en fait d'égalités. Il s'agit là d'un excellent réflexe !
- ▷ De nombreux élèves pensent à considérer a comme le minimum et supposent par l'absurde que $a < b, a < c$ et $a < d$. Après avoir obtenu une contradiction, (par exemple en montrant que $a = b$), ils en déduisent immédiatement que $a = b = c = d$. Toutefois, la contradiction obtenue ici permettait simplement d'affirmer qu'au moins l'une des inégalités strictes était invalide, mais pas forcément les trois en même temps.
- ▷ **La remarque la plus importante est sans doute la suivante :** De nombreux élèves affirment que l'on peut supposer sans perte de généralité que $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$. Cette supposition n'est possible que si les inégalités sont totalement symétriques, c'est-à-dire si échanger deux variables ne changent pas les inégalités. Or, ici, si on échange les variables a et b, le système d'inégalités change complètement.

  Les inégalités possèdent toutefois une symétrie cyclique : remplacer (a, b, c, d) par (d, a, b, c) ne change pas les inégalités. Cette symétrie cyclique ne nous permet donc pas d'ordonner les variables, mais seulement de choisir une variable pour être le minimum ou le maximum des 4 réels.

Exercice 2. Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus. On note D le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC, puis E le milieu du segment $[AD]$, et ω le cercle de diamètre $[AD]$. Ensuite, soit X le point d'intersection entre ω et la droite (BE), tel que B et X soient situés de part et d'autre de la droite (AD). De même, soit Y le point d'intersection entre ω et la droite (CE), tel que C et Y soient situés de part et d'autre de la droite (AD). Enfin, on suppose qu'il existe un point Z, autre que D, appartenant à la droite (AD) et aux deux cercles circonscrits à BDX et à CDY. Démontrer que $AB = AC$.

Solution de l'exercice 2 Soit ω' le cercle de diamètre $[EZ]$ et ω_b le cercle passant par B, D, X et Z. Puisque $\widehat{BDZ} = 90°$, on sait que $[BZ]$ est un diamètre de ω_b. On en déduit que $\widehat{EXZ} = \widehat{BXZ} = 90°$, donc que X est un point d'intersection entre ω et ω'. De même, Y est un point d'intersection entre ω et ω'.

Soit s la symétrie d'axe (AD) : elle laisse les cercles ω et ω' globalement invariants, donc elle échange X et Y. Puisque $E = s(E)$, la symétrie s échange donc les droites (EX) et (EY). En outre, s laisse également la droite (BC) globalement invariante. Ainsi, s échange B et C. Puisque $A = s(A)$, on en conclut que $AB = AC$.



Solution alternative n°1 Notons ω_b et ω_c les cercles circonscrits à $BDXZ$ et à $CDYZ$. La droite (DZ) est l'axe radical de ces deux cercles. Puisque E appartient à cet axe radical, il a mêmes puissances par rapport aux cercles ω_b et ω_c, ce qui signifie que $EX \cdot EB = EY \cdot EC$. Or, E est le centre du cercle ω. On en déduit que $EX = EY$, et donc que $EB = EC$.

Par conséquent, la droite (AD), qui est la perpendiculaire à (BC) passant par E, est aussi la médiatrice de $[BC]$. On en conclut comme prévu que $AB = AC$.

Commentaire des correcteurs Une première difficulté de l'exercice était de trouver comment tracer sa figure de façon pertinente. En effet, tracer d'emblée un triangle isocèle risquait de donner de fausses intuitions sur la figure. Cela a été dommageable pour des nombreux élèves qui, après avoir tracé la figure pour un triangle ABC isocèle en A, ont affirmé sans les démontrer certaines égalités d'angles parce qu'elles apparaissaient comme vraies sur la figure. Après avoir tracé cette première figure, il aurait en fait fallu tracer une nouvelle figure obtenue en oubliant l'une des hypothèses, par exemple en construisant un côté AB légèrement plus grand que le côté AC ; cette nouvelle figure pouvant alors servir comme support de réflexion alternatif, pour être sûr de ne pas être trompé par son propre brouillon. De manière générale, ce conseil reste valide pour tous les exercices de géométrie ayant un format analogue à celui de l'énoncé.

Il fallait ensuite trouver comment exploiter l'hypothèse donnée par l'énoncé. Le théorème de l'angle inscrit était de mise ici, et très peu d'élèves ont relevé l'égalité $\widehat{ZXB} = \widehat{ZDB} = 90°$, qui était pourtant le point de départ du raisonnement. La plupart des élèves qui ont noté cette égalité sont parvenus à conclure l'exercice.

Voici quelques éléments trouvés de façon récurrente dans les réponses proposées :

- ▷ Beaucoup d'élèves prétendent donner une solution complète du problème, mais qui en réalité ne fonctionnait pas ou comportait un trou important. La plupart du temps, cela vient du fait qu'une affirmation est donnée sans démonstration, sans doute parce qu'elle apparaît visuellement sur la figure (cf la remarque plus haut). L'affirmation est souvent vraie mais la démontrer revient souvent à démontrer l'exercice.

  Une façon de ne pas tomber dans cet écueil est de se relire, de vérifier que toutes les affirmations sont justifiées, et de vérifier si toutes les hypothèses de l'énoncé ont été utilisées ! Certains élèves affirment ainsi démontrer que le triangle ABC est isocèle sans évoquer une seule fois le point Z ou sans mentionner que le point E est défini comme le milieu du segment $[AD]$.

  De fait, tracer une figure alternative où l'on oublie telle ou telle hypothèse (par exemple les hypothèses que l'on n'a pas utilisées) permet de vérifier si ce que l'on raconte a une chance d'être vrai.

- ▷ Beaucoup d'élèves remarquent que la droite (AD) est l'axe radical de deux cercles. Cette remarque pouvait conduire à une autre façon (plutôt efficace) de résoudre l'exercice. Toutefois, il est frustrant de voir que la plupart des élèves ayant formulé cette remarque se sont arrêtés à cette remarque sans continuer leur raisonnement.

  L'intérêt de repérer un axe radical est de pouvoir ensuite regarder la puissance d'un point bien choisi sur cet axe par rapport aux deux cercles concernés. Ici, très peu d'élèves signalent que le point E appartenait à l'axe radical et a donc la même puissance par rapport aux deux cercles donnés.

Exercice 3. Soit $k \geqslant 1$ un entier, et soit A un sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, 3k\}$ tel que, pour tous les éléments a, b, c de A, si $a + b = 2c$, alors $a = b = c$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $r_k(n)$ le plus petit entier naturel *non nul* tel que $3k$ divise $n - r_k(n)$. En outre, on dit que n est *petit* si $n \leqslant k$, que n est *moyen* si $k + 1 \leqslant n \leqslant 2k$, et que n est *grand* si $2k + 1 \leqslant n$. Enfin, on suppose que l'on dispose de deux entiers naturels non nuls x et d tels que $r_k(x)$, $r_k(x + d)$ et $r_k(x + 2d)$ appartiennent tous trois à A, et tels que $r_k(x) \neq r_k(x + d)$.

Peut-on nécessairement affirmer, au vu des informations ci-dessus, que

a) au moins l'un des deux entiers $r_k(x)$ et $r_k(x + d)$ est moyen ou grand ?

b) au moins l'un des deux entiers $r_k(x)$ et $r_k(x + d)$ est petit ou grand ?

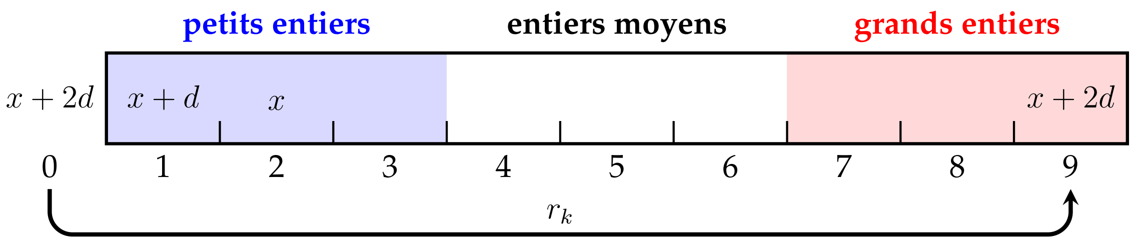
c) au moins l'un des deux entiers $r_k(x)$ et $r_k(x + d)$ est petit ou moyen ?

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Cet énoncé peut paraître long et compliqué. Il contient donc d'en retenir les éléments saillants, pour mieux comprendre ce qui se passe. Ici, on souhaite que l'ensemble A ne contienne pas de progression arithmétique (a, c, b). Il s'agit donc de trouver deux entiers x et d pour lesquels, quand bien même x, $x + d$ et $x + 2d$ sont manifestement en progression arithmétique, les restes $r_k(x)$, $r_k(x+d)$ et $r_k(x+2d)$ dans la division euclidienne par $3k$ ne seront *pas* en progression arithmétique.

Une idée, pour ce faire, est de construire x et d, éventuellement en les choisissant négatifs si ça nous arrange (il sera toujours temps d'ajouter à x et à d des multiples de $3k$ arbitrairement grands) tels que x et $x + d$ soient compris entre 1 et $3k$, mais $x + 2d$ dépasse de l'intervalle $\{1, 2, \ldots, 3k\}$. Une fois effectué ce travail de réflexion préparatoire, on peut maintenant traiter une à une les trois questions de l'énoncé : on cherchera à construire des entiers x et $x + d$ qui sont tous deux petits, ou tous deux moyens, ou tous deux grands.

a) Cherchons à construire de petits entiers x et $x+d$ tels que $x+2d \leqslant 0$ et $x+2d \geqslant 3k+1$. Puisque $x + 2d = 2(x + d) - x \leqslant 2k - 1 < 2k + 1$, il nous faut faire en sorte que $x + 2d \leqslant 0$, donc que $d < 0$. La manière la plus simple de procéder est alors de choisir $d = -1$, $x = 2$, et $k \geqslant 2$. Évidemment, on n'a pas vraiment le droit de choisir $d = -1$; comme mentionné précédemment, on choisira donc $d = 3k-1$, ce qui revient au même mais est conforme aux contraintes de l'énoncé.

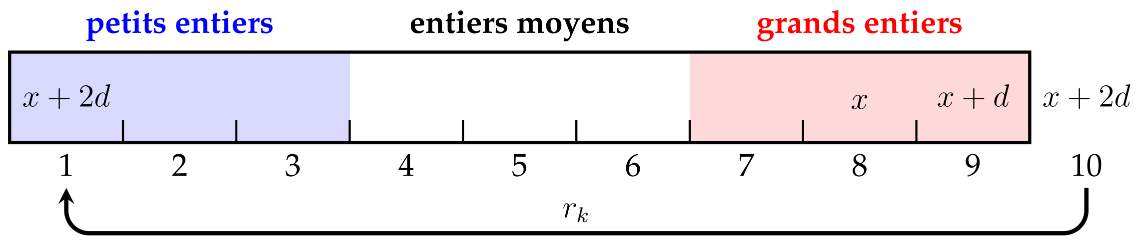
En pratique, si $k = 2$, $A = \{1, 2, 6\}$, $x = 2$ et $d = 5$, alors $r_k(x) = 2$ et $r_k(x + d) = 1$ sont deux petits éléments de A, et $r_k(x + 2d) = 6$ appartient à A également. La réponse est donc **négative**.



b) Supposons que $r_k(x)$ et $r_k(x+d)$ soient tous deux moyens, puis soit $t = 2r_k(x+d) - r_k(x)$. On sait que
$$2 = 2(k + 1) - 2k \leqslant t \leqslant 2 \times 2k - (k + 1) = 3k - 1$$
et que
$$t \equiv 2(x + d) - x \equiv x + 2d \pmod{3k},$$
donc que $t = r_k(x + 2d)$. Mais alors $t + r_k(x) = 2r_k(x + d)$, en contradiction avec la caractérisation initiale de A. Ceci invalide notre supposition, et la réponse est donc **positive**.

c) Au vu de la symétrie manifeste entre gauche et droite, il suffit d'adapter la construction proposée en question a), en remplaçant x par $3k+1-x$ et d par $3k-d$.

En pratique, si $k=2$, $A=\{1,5,6\}$, $x=5$ et $d=1$, alors $r_k(x)=5$ et $r_k(x+d)=6$ sont deux grands éléments de A, et $r_k(x+2d)=1$ appartient à A également. La réponse est donc **négative**.



<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Une des difficultés principales de cet exercice était d'en comprendre l'énoncé en détail, sans oublier des contraintes de ci de là. L'idée était ensuite de mettre en évidence trois entiers qui sont en progression arithmétique si on les considère modulo $3k$, mais pas si on les considère en tant qu'entiers. Les élèves qui ont eu cette idée ont en général obtenu d'excellents résultats.

On peut cependant noter que plusieurs erreurs évitables ont piégé de nombreux élèves. Nous les listons ici pour éviter qu'elles ne se reproduisent :

▷ Plusieurs élèves ont confondu les entiers x, $x+d$ et $x+2d$ avec leurs restes $r_k(x)$, $r_k(x+d)$ et $r_k(x+2d)$. En particulier, ils ont cru que x, $x+d$ et $x+2d$ devaient forcément être compris entre 1 et $3k$.

▷ Plusieurs élèves ont cru à tort que, pour que l'on puisse diviser x par $3k$, il fallait nécessairement que le quotient de cette division soit non nul.

▷ Plusieurs élèves ont cru fournir des contre-exemples qui étaient en fait faux, parce qu'ils avaient oublié certaines contraintes de l'énoncé. De manière générale, une fois que l'on dispose d'un contre-exemple, il est **très important** de relire attentivement l'énoncé pour vérifier qu'il s'agit bien d'un contre-exemple : en effet, si on se contente d'exhiber ce contre-exemple mais que l'on s'est en fait trompé, on ne fournit plus au correcteur d'éléments qui lui permettront de donner des points, et il se retrouve donc sans autre choix que de n'en donner aucun pour la question concernée.

▷ Enfin, de manière surprenante, et même s'il ne s'agit pas d'une erreur *stricto sensu*, plusieurs élèves on traité le cas a) mais pas le cas c), ou l'inverse, alors même que les idées mises en jeu étaient exactement les mêmes.

Exercice 4. Soit $(F_k)_{k\geqslant 0}$ la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et $F_{k+2} = F_k + F_{k+1}$ pour tout entier $k \geqslant 0$. Soit ensuite $n \geqslant 1$ un entier. Démontrer qu'il existe exactement F_{n+1} façons d'ordonner les nombres $1, 2, \ldots, n$ de manière à obtenir un n-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tel que

$$a_1 \leqslant 2a_2 \leqslant 3a_3 \leqslant \ldots \leqslant na_n.$$

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> On dit qu'une permutation $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ des entiers $1, 2, \ldots, n$ est *jolie* si elle satisfait les inégalités $a_1 \leqslant 2a_2 \leqslant \ldots \leqslant na_n$.

Tout d'abord, soit $\mathbf{a}$ une jolie permutation. S'il existe un entier k pour lequel $a_k \leqslant k-2$, on choisit k minimal. Dans ces conditions, on sait que $k \geqslant 2$ et que $a_{k-1} \geqslant k-2 \geqslant a_k$, de sorte que $a_{k-1} \geqslant a_k + 1$. On en conclut que

$$(k-1)a_{k-1} \geqslant (k-1)(a_k+1) = ka_k + (k - a_k - 1) \geqslant ka_k + 1,$$

et donc que $\mathbf{a}$ n'est pas jolie. On en conclut donc que $a_k \geqslant k-1$ pour tout $k \leqslant n$.

D'autre part, soit ℓ l'entier tel que $a_\ell = n$. Au vu du résultat obtenu précédemment, une récurrence descendante immédiate sur k nous assure que $a_k = k-1$ pour tout entier k tel que $\ell + 1 \leqslant k \leqslant n$. Puisque

$$\ell n = \ell a_\ell \leqslant (\ell+1)a_{\ell+1} = (\ell+1)\ell,$$

on en conclut que $\ell \in \{n-1, n\}$.

Ainsi, pour que $\mathbf{a}$ soit jolie, on dispose a priori de deux choix :

- ▷ soit $\ell = n$, auquel cas $\mathbf{a}$ est effectivement jolie si et seulement si la permutation $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ des entiers $1, 2, \ldots, n-1$ est jolie ;
- ▷ soit $\ell = n-1$, auquel cas $a_n = n-1$, et alors $\mathbf{a}$ est effectivement jolie si la permutation $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ des entiers $1, 2, \ldots, n-2$ est jolie.

Par conséquent, si on note J_n le nombre de jolies permutations de $1, 2, \ldots, n$, on remarque bien que $J_n = J_{n-1} + J_{n-2}$ dès lors que $n \geqslant 3$. On conclut en vérifiant que $J_1 = 1 = F_2$ et que $J_2 = 2 = F_3$.

<u>*Solution alternative n°1*</u> Comme précédemment, on considère une permutation $\mathbf{a}$ puis l'entier ℓ tel que $a_\ell = n$. Puisque $na_k \geqslant ka_k \geqslant \ell a_\ell = \ell n$ pour tout $k \geqslant \ell$, on sait que $\mathbf{a}$ induit une permutation de $1, 2, \ldots, \ell-1$ et de $\ell, \ell+1, \ldots, n$.

Si $\ell \leqslant n-1$, soit m l'unique entier tel que $a_m = \ell$. Puisque $m \geqslant \ell$, on sait que

$$m\ell = ma_m \geqslant \ell a_\ell = \ell n,$$

donc que $m = n$. Mais alors $ka_k = \ell n$ pour tout entier k tel que $\ell \leqslant k \leqslant n$. On en déduit en particulier que $n-1$ divise $(n-1)a_{n-1} = \ell n$, donc divise ℓ aussi, ce qui signifie que $\ell = n-1$.

Maintenant acquis le fait que $\ell \in \{n-1, n\}$, on conclut comme précédemment.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Cet exercice était difficile. Néanmoins, une bonne partie des élèves a eu la bonne idée d'essayer de trouver une relation de récurrence sur le nombre de permutations vérifiant l'énoncé et a réussi, en analysant la relation de récurrence, à comprendre la structure des permutations vérifiant l'énoncé.

Toutefois, très peu d'élèves ont réussi à formaliser cela, en particulier à montrer que l'entier ℓ défini dans la correction était bien supérieur ou égal à $n-1$. Certains ont utilisé le fait que $n(n-2) < (n-1)^2$ pour conclure dans le cas général. Si cet argument fonctionnait pour $\ell = n-2$, il était malheureusement impossible de l'adapter directement pour des ℓ quelconques.

Attention aussi à la récurrence ! Plusieurs élèves ont montré, si on note k_n le nombre de permutations de $\{1, \ldots, n\}$ vérifiant l'énoncé, que $k_n = k_{n-1} + k_{n-2}$. Ils ont ensuite fait une récurrence forte, initialisée à $n = 1$, pour prouver que $k_n = F_{n+1}$. Ici pour $n = 2$, la formule $k_2 = k_1 + k_0$ n'a pas de sens car k_0 n'est même pas défini. Ce raisonnement par récurrence ne permettait donc pas de prouver que $k_2 = F_3$, et il aurait fallu traiter cette égalité dans le cadre de l'initialisation de notre récurrence. Ici, pour éviter cette erreur, il valait mieux faire une récurrence double, qui nécessite explicitement d'initialiser à $n = 1$ et $n = 2$.

Problèmes Senior

Exercice 5. Pierre et Clara jouent au jeu suivant. Tout d'abord, Clara choisit un entier c. Puis Pierre choisit un nombre premier $p \geqslant c$ et écrit deux entiers a et b au tableau. Clara se permet alors d'effectuer les opérations suivantes : elle choisit un des deux nombres écrits au tableau, disons n, l'efface, et écrit à la place un autre entier, disons m, tel que p divise $(n^2 - m + 1)(m^2 - n + 1)$. Clara gagne si elle réussit à faire en sorte, au bout d'un nombre fini de telles opérations, que les deux entiers écrits au tableau soient identiques. Sinon, elle perd, et c'est Pierre qui gagne.

Démontrer que Pierre peut empêcher Clara de gagner.

Solution de l'exercice 5 Soit p un nombre premier, arbitrairement grand, que Pierre est susceptible de choisir, et soit $f\colon \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ la fonction définie par $f(x) = x^2 + 1$.

Lorsque Clara remplace un entier n par un entier m, l'une des deux égalités $n = f(m)$ ou $m = f(n)$ est nécessairement vérifiée, de sorte que m et n appartiennent à une même orbite de f. On dit alors que deux résidus u et v modulo p sont *reliés* s'il existe deux entiers $k \geqslant 0$ et $\ell \geqslant 0$ tels que $f^k(u) = f^\ell(v)$. Il apparaît directement que, si Clara parvient à transformer un résidu m en un résidu n, ces deux résidus sont reliés ; la réciproque est d'ailleurs vraie, même si nous n'en aurons pas besoin.

Pierre a donc pour but de trouver un nombre premier $p \geqslant c$, puis deux résidus a et b modulo p qui ne sont pas reliés l'un à l'autre. Pour ce faire, le plus simple est que a et b soient des points fixes de f, c'est-à-dire que $(X - a)(X - b) \equiv X^2 - X + 1 \pmod p$.

Or, si $X^2 - X + 1$ admet une racine a modulo p, l'autre racine vaut $1/a$ (car a est non nul), ou encore $1-a$. Ces deux racines ne sont donc égales que si $1-a \equiv a \equiv 1/a \pmod p$, c'est-à-dire si $p \neq 2$ et $1/2 \equiv a \equiv \pm 1 \pmod p$. Or, on sait que $1/2 \equiv \pm 1 \pmod p$ si et seulement si $p = 3$.

Par conséquent, Pierre n'a qu'à choisir un nombre premier $p > \max\{c, 3\}$ qui divise un nombre de la forme $n^2 - n + 1$. En pratique, pour ce faire, il lui suffit de définir p comme le plus petit facteur premier du nombre $S_m = (m!)^2 - m! + 1$, où l'on a posé $m = \max\{c, 3\}$. En effet, on sait que $S_m \geqslant 2$ et que S_m est premier avec $m!$. Ainsi, le plus petit facteur premier de S_m existe bien, et il est premier avec $m!$, donc strictement supérieur à m. Pierre s'empressera ensuite de choisir $a = m!$ et $b = 1 - m!$ pour enfin savourer une victoire amplement méritée.

Solution alternative n°1 Étant donné un nombre premier p, nous allons construire le graphe G dont les sommets sont les éléments de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et les arêtes sont les paires (m, n) telles que $(n^2 - m + 1)(m^2 - n + 1) \equiv 0 \pmod p$. On dira qu'une arête (m, n) est *utile* si $m \neq n$, et qu'elle est inutile sinon, c'est-à-dire s'il s'agit d'une boucle. Si G contient au plus $p-2$ arêtes utiles, alors il n'est pas connexe, et Pierre n'a plus qu'à choisir des entiers appartenant à deux composantes connexes distinctes.

On dit ensuite qu'une arête (m, n) est *engendrée* par n si $m \equiv n^2 + 1 \pmod m$. Toute arête est engendrée par une de ses extrémités, et chaque sommet engendre une unique arête, donc G contient au plus p arêtes. Par conséquent, si G contient deux arêtes inutiles, c'est-à-dire s'il existe deux résidus distincts u et v tels que $u \equiv u^2 + 1 \pmod p$ et $v \equiv v^2 + 1 \pmod p$, Pierre est assuré de pouvoir gagner.

Il lui suffit alors de procéder comme dans la solution précédente.

Remarque : On peut en fait démontrer que tout graphe G construit comme ci-dessus contient au moins $p - 1$ arêtes. En effet, si ce n'est pas le cas, il existe deux arêtes (m, n) et (u, v), dont chacune est engendrée par ses deux extrémités, et telles que m, n, u et v sont deux à deux distincts modulo p. Ce sont là quatre racines distinctes du polynôme $P(X) = (X^2+1)^2+1-X$

dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, telles que $m = f(n)$, $n = f(m)$, $u = f(v)$ et $v = f(u)$.

Or, tout point fixe de f est racine de P, ce qui signifie que P est divisible par le polynôme $Q(X) = X^2 + 1 - X$. On en déduit la factorisation $P(X) = (X^2 + X + 2)Q(X)$. Ainsi, parmi m, n, u et v, deux sont des racines de Q, c'est-à-dire des points fixes de f, en contradiction avec notre hypothèse.

En particulier, s'intéresser aux points fixes de f, ou au minimum à ses cycles de petite taille, était donc indispensable.

Solution alternative n°2 La solution ci-dessous fait appel à des notions plus avancées, mais cela permet une approche laxiste de la dimension combinatoire du problème. Ci-dessous, on considère directement que Pierre choisit des résidus modulo p plutôt que des entiers, et on note $f : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ la fonction définie par $f(x) = x^2 + 1$. Lorsque x et y sont des résidus modulo p, on notera abusivement $x = y$ et $x \neq y$ les relations $x \equiv y \pmod{p}$ et $x \not\equiv y \pmod{p}$.

Supposons que Pierre a choisi un nombre premier p et deux résidus a et b tels que $b \neq \pm a$ tels que $a = f(a)$, mais que Clara gagne malgré tout. Puisque toute opération de Clara peut être inversée, on suppose sans perte de généralité que celle-ci a graduellement transformé a en b, en le plus petit nombre d'étapes possibles.

La première étape de Clara consiste à transformer a en $f(a) = a$, ce qui serait stupide, ou en un antécédent $x \neq a$ de a par f. Les deux antécédents de a par f sont opposés l'un à l'autre, et l'un est égal à a, donc l'autre vaut $-a$. Ainsi, Clara a transformé a en $-a$.

Puisque $b \neq -a$, Clara a de nouveau dû transformer $-a$ en $f(-a) = a$, ce qui serait encore une fois stupide, ou bien en un antécédent y de $-a$ par f, de sorte que $-a-1 = f(y)-1 = y^2$ est un résidu quadratique modulo p.

Par conséquent, Pierre gagnera s'il trouve un nombre premier $p \geqslant 3$ pour lequel f a un point fixe a tel que $-a-1$ ne soit pas un résidu quadratique modulo p. Or, si a est un point fixe de f, on sait que $f(1-a) = a^2 - 2a + 2 = f(a) - 2a + 1 = 1 - a$, donc que $1 - a$ est aussi un point fixe de f. Il suffit donc que soit $-a-1$, soit $a-2$ ne soit pas un résidu quadratique (soit les deux).

La manière la plus simple pour s'assurer que deux nombres ne seront pas tous deux des résidus quadratiques est de faire en sorte que leur produit n'en soit pas un. Cette technique sera ici avantageuse, puisqu'elle nous permettra de ne pas devoir distinguer les résidus $-a-1$ et $a-2$, qui avaient été définis de manière symétrique. Ici, Pierre va donc choisir p de sorte que $(a-2)(-a-1) = 2 + a - a^2 = 3$ ne soit pas un résidu quadratique.

Enfin, il doit s'assurer que f ait bien un point fixe. Or, s'il se plonge dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, Pierre sait bien que les racines du polynôme $f(X) - X = X^2 - X + 1$ sont $(1 + \sqrt{-3})/2$ et $(1 - \sqrt{-3})/2$. On reconnaît donc là que a est un point fixe de f si et seulement si $(2a-1)^2 = -3$, et un tel point fixe existe donc si et seulement si -3 est un résidu quadratique. Il s'agit donc, pour Pierre, de choisir un nombre premier p pour lequel -3 est un résidu quadratique et -1 n'en est pas un.

Or, s'il existe un résidu z tel que $z^2 = -1$, on sait que z est d'ordre 4, donc que $p \equiv 1 \pmod{4}$. Pierre va donc chercher p parmi les facteurs premiers non congrus à $1 \pmod{4}$ d'un entier de la forme $n^2 + 3$. Choisir n premier avec 3 nous assure déjà que $p \neq 3$. Ensuite, choisir n pair nous assure que $n^2 + 3 \equiv 3 \pmod{4}$, donc que n admet nécessairement un facteur premier $p \equiv 3 \pmod{4}$. Il suffit donc de définir n comme le PPCM des nombres premiers inférieurs ou égaux à $\max\{c, 2\}$ et différents de 3 : le facteur p que choisira Pierre sera premier avec tous ces nombres premiers, mais aussi avec 3, de sorte que $p > c$, et les considérations des paragraphes précédents nous assurent alors que Pierre peut choisir des entiers a et b de façon adéquate.

Remarque : Une fois résolu à choisir un nombre premier p pour lequel ni 3 ni -1 ne sont des résidus quadratiques, Pierre peut aussi se reposer sur des théorèmes puissants mais qu'il ne sait pas nécessairement démontrer, ce qui lui laissera un léger goût d'inachevé.

Théorème de la réciprocité quadratique. Soit p un nombre premier et n un entier non divisible par p. On pose $\left(\frac{n}{p}\right) = 1$ si n est un résidu quadratique modulo p, et $\left(\frac{n}{p}\right) = -1$ sinon.

- Si p et q sont deux nombres premiers impairs distincts, $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}$.
- Pour tout nombre premier p impair, $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2}$ et $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{(p^2-1)/8}$.

Théorème de Dirichlet sur les nombres premiers. Soit a et b deux entiers premiers entre eux. Il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p \equiv a \pmod{b}$.

Muni de ces deux résultats, Pierre choisit donc un nombre premier p tel que $p \equiv 3 \pmod{4}$ et $\left(\frac{p}{3}\right) = -\left(\frac{3}{p}\right) = 1$, c'est-à-dire $p \equiv 1 \pmod{3}$. Il s'agit ainsi de choisir un nombre premier $p \geqslant c$ tel que $p \equiv 7 \pmod{12}$, et le théorème de Dirichlet indique qu'un tel nombre premier existe bien.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Très peu d'élèves ont entièrement résolu ce problème difficile, qui aurait pu faire figure de problème 1 ou 4 difficile à l'Olympiade Internationale. Il s'agit de l'étude d'un système dynamique présentée sous la forme d'un jeu à stratégie gagnante. Deux approches principales étaient possibles ici : une approche combinatoire traduisant le problème en termes d'un graphe dont les sommets appartenaient à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, comme dans les deux premières solutions proposées, et une approche très arithmétique passant par une étude des carrés modulo p, comme dans la solution alternative n°2. Chacune des deux approches nécessitait la mise en place de nombreuses idées, et obtenir des points nécessitait donc d'établir des résultats significatifs.

Ce problème consistait en l'étude d'un système dynamique, c'est-à-dire un système (ici, un couple d'entiers) sur lequel on agit via une opération (ici, on remplace un entier par un autre selon certaines contraintes). Dans un tel cas, **il est primordial d'étudier les petits cas**. De nombreux élèves ont présenté leur étude pour des p particuliers, le plus souvent pour $p = 7$. Même si cette initiative n'était pas récompensée par un point ici, nous l'encourageons fortement !

Un autre réflexe important à avoir est de considérer les éventuels points fixes de l'opération. C'était ici, quelle que soit l'approche, le point de départ du problème, et plusieurs élèves ont eu ce réflexe, à la grande satisfaction des correcteurs. Quelques élèves ont cherché des invariants au système et c'est évidemment une très bonne idée. Même si elle ne permettait pas d'avancer dans ce problème, cette tentative était très pertinente. De même, plusieurs élèves ont mentionné la que les opérations de Clara étaient réversibles : ce point était certes facile à démontrer, mais il s'agit là d'une caractéristique qu'il est utile à étudier de manière générale. Nous espérons que ces rappels permettront aux élèves de progresser et d'être mieux armés la prochaine fois qu'ils tombent sur un problème similaire.

Nous listons maintenant quelques erreurs rencontrées dans les tentatives de solutions.

- Attention à bien lire l'énoncé ! Nous déplorons que plusieurs raisonnements soient voués à l'échec car l'énoncé de départ n'est pas compris correctement. Quelques élèves ont par exemple cru que les entiers m et n de l'hypothèse $p \mid (m^2 - n + 1)(n^2 - m + 1)$

étaient les deux entiers écrits au tableau. D'autres élèves font d'emblée une erreur de signe dans leur congruence, en écrivant que que $m^2 \equiv n + 1 \pmod p$.

▷ Une fois supposée ou acquise l'existence d'un point fixe pour l'opération de Clara, c'est-à-dire d'un entier a et d'un nombre premier p tels que $a^2 + 1 \equiv a \pmod p$, plusieurs élèves étudient les antécédents possibles de a par l'opération, dans l'espoir de montrer que a ne peut pas être obtenu à partir de tous les autres restes modulo p. La plupart remarquent que $-a$ est lui aussi un antécédent de a, car $a^2 \equiv b^2 \pmod p$ si et seulement si $a \equiv \pm b \pmod p$). Mais certains concluent trop hâtivement qu'alors a et $-a$ sont isolés et ne peuvent être atteints par d'autres entiers ; il restait cependant possible que $-a$ ait plusieurs antécédents autres que $\pm a$.

Nous terminons par avouer notre surprise devant les statistiques : de nombreux élèves ayant passé le test n'ont rien rendu pour ce problème en particulier, pourtant censé être plus abordable que les deux suivants. S'il est bon de regarder tous les problèmes, il est stratégique de passer une grande partie du temps donné sur le problème classé comme le plus abordable, puisqu'on peut plus facilement espérer y avoir des idées intéressantes et donc y récolter des points.

Exercice 6. Trouver le plus grand entier $n \geqslant 3$ pour lequel il existe un ensemble $\mathcal{S}$ de n points du plan avec la propriété suivante : tout triangle (même plat) dont les sommets appartiennent à $\mathcal{S}$ est isocèle mais pas équilatéral.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> On dit qu'un ensemble $\mathcal{S}$ ayant la propriété requise est *mignon*. Nous allons démontrer que tout ensemble mignon contient au plus 6 éléments. En outre, on notera $\omega_{A,B}$ le cercle de centre A passant par B, et par $\ell_{A,B}$ la médiatrice du segment $[AB]$.

Tout d'abord, si $\mathcal{S}$ est formé des cinq sommets $P_1, \ldots, P_5$ d'un pentagone régulier ainsi que de son centre O, on vérifie aisément que $\mathcal{S}$ est mignon.

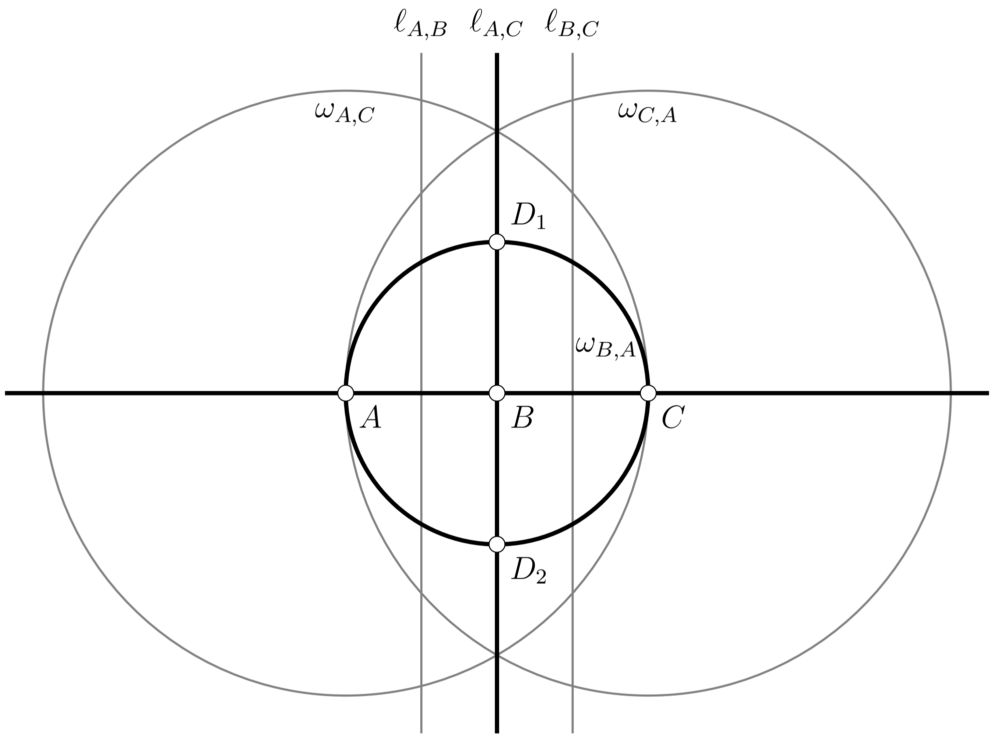
Réciproquement, soit $\mathcal{S}$ un ensemble mignon à $n \geqslant 6$ points : nous allons démontrer que $n = 6$. Pour tous les points X, Y et Z de $\mathcal{S}$, on sait que Z appartient à un seul des trois ensembles $\omega_{X,Y}$, $\omega_{Y,X}$ et $\ell_{X,Y}$. Cette remarque nous permet déjà de démontrer le résultat suivant.

Lemme 1. Trois points quelconques de $\mathcal{S}$ ne sont jamais alignés.

Démonstration : Supposons que $\mathcal{S}$ contient trois points A, B et C, alignés dans cet ordre. Puisque ABC est isocèle, B est le milieu de $[AC]$. Soit maintenant D un autre point de $\mathcal{S}$. Sans perte de généralité, on suppose que $AD \leqslant CD$.

Comme D ne peut appartenir ni au cercle $\omega_{C,B}$ ni à la droite $\ell_{B,C}$, il appartient nécessairement au cercle $\omega_{B,C} = \omega_{B,A}$. Mais alors D ne peut appartenir ni au cercle $\omega_{C,A}$, ni au cercle $\omega_{A,C}$, et il appartient donc nécessairement à la droite $\ell_{A,C}$. Cette situation se répète pour chacun des $n-3$ points de $\mathcal{S} \setminus \{A, B, C\}$, qui appartiennent donc à la fois à $\omega_{B,C}$ et à $\ell_{A,C}$.

Or, une droite et un cercle ont au plus deux points d'intersection. Notre supposition initiale était donc invalide, ce qui démontre le lemme. $\square$



On continue alors, et on s'intéresse aux paires de cercles $\omega_{A,B}$ et $\omega_{B,A}$.

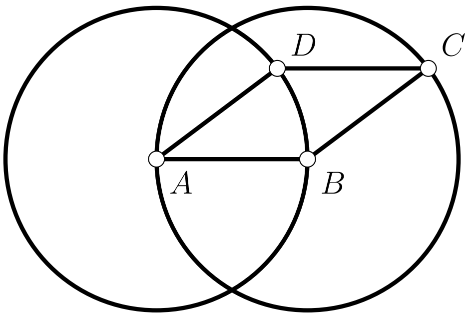
Lemme 2. Soit A et B deux points de $\mathcal{S}$. Si $\mathcal{S}$ contient à la fois des points de $\omega_{A,B}$ et de $\omega_{B,A}$ autres que A et B, alors $n \leqslant 6$.

Démonstration : Supposons que $\mathcal{S}$ contient deux points C et D, distincts de A et de B, qui appartiennent respectivement aux cercles $\omega_{B,A}$ et $\omega_{A,B}$. Ils ne peuvent être égaux l'un à l'autre, ce sans quoi le triangle ABC serait équilatéral. Nous allons d'abord démontrer que (AB) est parallèle à (CD).

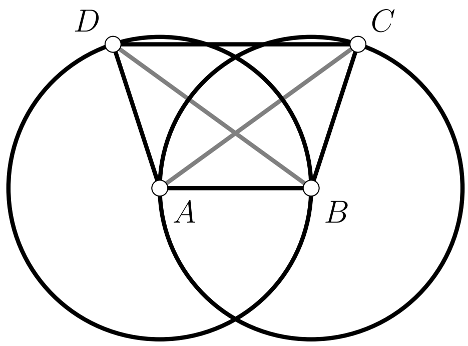
En effet, si $AB = CD$, alors $AB = BC = CD = DA$, et le quadrilatère $ABCD$ est un losange, donc (AB) est bien parallèle à (CD). On suppose donc que $AB \neq CD$, c'est-à-dire que $AD \neq CD$. Puisque $AC \neq AD$ et que ACD est isocèle, on en déduit que $AC = CD$. On démontre de même que $BD = CD$, de sorte que $AC = BD$, et donc que les triangles ABC et DAB sont isométriques.

Supposons ensuite que C et D se trouvent de part et d'autre de la droite (AB). Si l'on note θ l'angle $\widehat{ABC}$, on peut alors vérifier, par exemple en utilisant des coordonnées cartésiennes, que $AC^2 = BD^2 = (2 - 2\cos(\theta))AB^2$ et que $CD^2 = (5 - 4\cos(\theta))AB^2$. Comme $AC = CD$, on en conclut alors que $2\cos(\theta) = 3$, ce qui est absurde. Notre supposition est donc invalide, de sorte que C et D sont nécessairement du même côté de (AB), et donc que (AB) est bien parallèle à (CD).

Une fois cette relation de parallélisme acquise, on conclut que tout point de $\mathcal{S}$ appartient à la droite (AB), à la médiatrice $\ell_{A,B}$, ou encore à une parallèle à (AB) passant par C ou par D, c'est-à-dire à (CD). Le lemme 1 nous assure que nulle de ces droites ne contient plus de deux points de $\mathcal{S}$, ce qui prouve que $n \leqslant 6$ et démontre le lemme. $\square$



Cas 1 : $AB = BC = CD = DA$

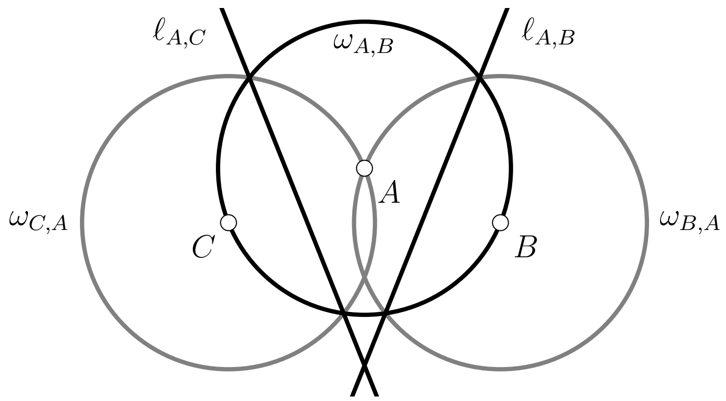


Cas 2 : $AC = CD = DB$

Lemme 3. Soit A et B deux points de $\mathcal{S}$. Si $n \geqslant 7$, alors soit $\omega_{A,B}$ contient au moins $n - 2$ points de $\mathcal{S}$, soit B est le seul point de $\mathcal{S}$ appartenant à $\omega_{A,B}$.

Démonstration : Supposons que $n \geqslant 7$ et que le cercle $\omega_{A,B}$ contient $k \geqslant 2$ points de $\mathcal{S}$. Les lemmes 1 et 2 nous assurent respectivement que $\ell_{A,B}$ contient au plus deux points de $\mathcal{S}$, et que A est le seul point de $\mathcal{S}$ appartenant à $\omega_{B,A}$. On en déduit que $k \geqslant n - 3$, avec égalité si et seulement si $\ell_{A,B}$ contient exactement deux points de $\mathcal{S}$, dont aucun n'appartient à $\omega_{A,B}$.

Si $k = n - 3$, soit C un autre point de $\omega_{A,B}$. Pour les mêmes raisons que précédemment, la droite $\ell_{A,C}$ contient deux points de $\mathcal{S}$, dont aucun n'appartient à $\omega_{A,C} = \omega_{A,B}$. Or, puisque $\ell_{A,B}$ et $\ell_{A,C}$ ont au plus un point commun, elles contiennent donc au moins, à elles deux, trois points de $\mathcal{S}$. Si l'on ajoute le point A et les k points de $\mathcal{S}$ appartenant à $\omega_{A,B}$, cela nous fait un total de $k + 4 = n + 1$ points dans $\mathcal{S}$. Notre supposition initiale était donc invalide, ce qui démontre le lemme. $\square$



En conclusion, revenons à l'énoncé lui-même. Nous allons supposer que $n \geqslant 7$ et aboutir à une absurdité. Soit A, B et C trois points de $\mathcal{S}$. La droite $\ell_{A,B}$ contient au plus deux points de $\mathcal{S}$, donc l'un des cercles $\omega_{A,B}$ et $\omega_{B,A}$ (disons $\omega_{A,B}$) en contient au moins deux. Le lemme 3 nous assure alors que $\omega_{A,B}$ contient au moins $n-2$ points de $\mathcal{S}$.

De même, l'un des cercles $\omega_{B,C}$ et $\omega_{C,B}$ (disons $\omega_{X,Y}$) contient au moins $n-2$ points de $\mathcal{S}$. On dispose alors de deux cercles, de centres A et X, qui contiennent chacun $n-2$ points de $\mathcal{S}$. Ils ont donc au moins $n-4 \geqslant 3$ points communs, ce qui est absurde puisque leurs centres sont distincts. On tient donc ici l'absurdité tant désirée, qui conclut notre solution.

Solution alternative n°1 Réutilisons les notations de la solution ci-dessus. On démontre comme précédemment qu'il existe un ensemble mignon à 6 éléments, et on procède désormais par l'absurde, en supposant que l'on dispose d'un ensemble $\mathcal{S}$ mignon à 7 éléments. Comme dans la solution précédente, on démontre que 3 points de $\mathcal{S}$ ne sont jamais alignés. On démontre ensuite le résultat suivant.

Lemme 4. Soit A et B deux points de $\mathcal{S}$. Si $n \geqslant 7$, alors $\omega_{A,B}$ contient au plus 3 points de $\mathcal{S}$.

Démonstration : Supposons que $\omega_{A,B}$ contient au moins quatre points B, C, D et E, tels que $BC = CD$. Puisque B et D sont les deux seuls points d'intersection de $\omega_{A,B}$ et $\omega_{C,B} = \omega_{C,D}$, et que A est l'unique point d'intersection de $\omega_{B,C}$ et $\omega_{D,C}$, on sait que E est, au choix :

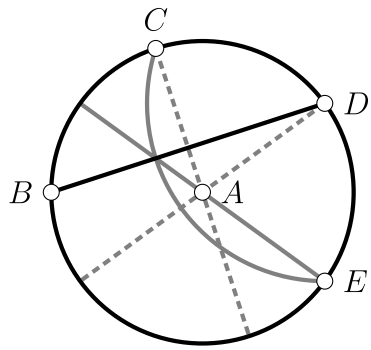
1. sur $\omega_{A,B}$, $\ell_{C,D}$ et $\omega_{B,C}$;
2. sur $\omega_{A,B}$, $\ell_{B,C}$ et $\omega_{D,C}$;
3. sur $\omega_{A,B}$, $\omega_{B,C}$ et $\omega_{D,C}$.

Dans le troisième cas, on a donc $BC = CD = DE = EB$, de sorte que $BCDE$ est un losange dont les sommets sont cocycliques, c'est-à-dire un carré, et donc que A, B et D sont alignés. Ce cas est donc impossible. Par ailleurs, les premier et deuxième cas sont symétriques l'un de l'autre. On suppose donc que l'on est dans le deuxième cas.

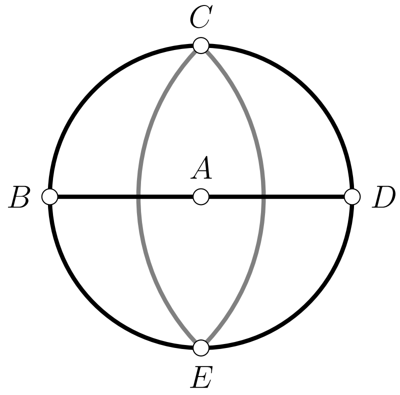
On observe alors que B, C, D et E sont quatre sommets consécutifs d'un pentagone régulier de centre A, et dont on note d la longueur des côtés. Parmi les deux autres points de $\mathcal{S}$, l'un n'appartient pas à $\ell_{C,D}$, qui contient déjà A : on note X ce point. Chacune des droites $\ell_{B,C}$ et $\ell_{D,E}$ contient déjà deux points de $\mathcal{S}$ parmi A, B, C, D et E, et ne contient donc pas X. On en déduit que

$$\begin{cases} BX = d \text{ ou } CX = d; \\ CX = d \text{ ou } DX = d; \\ DX = d \text{ ou } EX = d. \end{cases}$$

Par conséquent, X est sur $\ell_{B,D}$ (si $BX = DX = d$) ou sur $\ell_{C,E}$ (si $CX = EX = d$). Ces deux cas sont impossibles, puisque $\ell_{B,D}$ contient déjà A et C, tandis que $\ell_{C,E}$ contient déjà A et D. Note supposition initiale était donc invalide, ce qui démontre le lemme. □



Cas 2 : $E \in \ell_{B,C} \cap \omega_{D,C}$



Cas 3 : $E \in \omega_{B,C} \cap \omega_{D,C}$

Pour tout segment $[A, B]$ dont les extrémités sont dans $\mathcal{S}$, on note maintenant $p_{A,B}$ le nombre de points de $\mathcal{S}$ situés sur la médiatrice $\ell_{A,B}$: on dit qu'il s'agit du *poids* de $[A, B]$. Puisqu'il existe $\binom{7}{3} = 35$ triangles isocèles (mais pas équilatéraux) à sommets dans $\mathcal{S}$, la somme des poids des segments vaut 35. Or, il y a $\binom{7}{2} = 21$ segments, dont aucun n'est de poids $p_{A,B} \geqslant 3$. Si on note a_i le nombre de segments de poids i, on constate donc que

$$35 = 2a_2 + a_1 \leqslant (a_0 + a_1 + a_2) + a_2 = 21 + a_2,$$

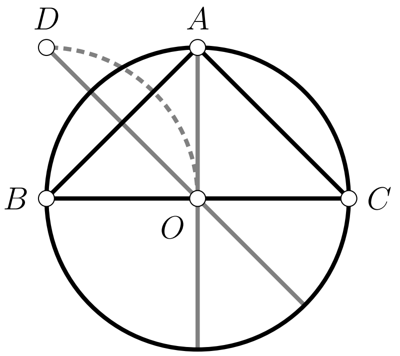
de sorte que $a_2 \geqslant 14$. Comme $2a_2 = 28 \geqslant 24,5 = (1 - 1/2) \times 7^2$, le théorème de Turan indique qu'il existe un triangle ABC, isocèle en A, dont les trois côtés $[A, B]$, $[B, C]$ et $[C, A]$ sont de poids 2.

Parmi A, B et C, seul A appartient à l'une des trois médiatrices $\ell_{A,B}$, $\ell_{B,C}$ ou $\ell_{C,A}$. En outre, ces trois médiatrices concourent en O, le centre du cercle circonscrit à ABC. Par conséquent, si $O \notin \mathcal{S}$, on sait que $\mathcal{S}$ contient 8 points distincts, que sont B, C, et deux points sur chacune des médiatrices $\ell_{A,B}$, $\ell_{B,C}$ et $\ell_{C,A}$. On en déduit que $O \in \mathcal{S}$.

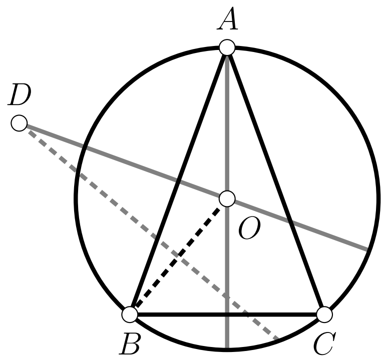
Soit alors D le second point de $\mathcal{S}$ situé sur $\ell_{A,B}$. Puisque $D \notin \omega_{O,B}$, on sait que $D \in \omega_{B,O}$, auquel cas D coïncide avec le symétrique de O par rapport à (AB), ou bien que $D \in \ell_{B,O}$, auquel cas D coïncide avec le centre du cercle circonscrit à ABO. Dans les deux cas, remarquons que $D \notin \omega_{A,B} = \omega_{A,C}$ et que $D \notin \ell_{A,C}$, de sorte que $D \in \omega_{C,A}$.

Dans le premier cas, on sait en outre que $BD = BO \neq BC$, donc que $D \notin \omega_{B,C}$, et que $D \notin \ell_{B,C}$, de sorte que $D \in \omega_{C,B}$. Cela signifie que $CD = CB \neq CO$, donc que $D \notin \omega_{C,O}$. Puisque $D \notin \omega_{O,C}$, on en déduit que $D \in \ell_{C,O}$. Ainsi, et puisque $D \in \omega_{C,A}$, on sait que $OD = CD = CA = BA$, donc que $ADBO$ est un losange dont les diagonales sont de même longueur, c'est-à-dire un carré. Mais alors $\widehat{AOB}$ est droit, et $\widehat{AOC}$ est droit aussi, donc B, O et C sont alignés, ce qui contrevient au lemme 1. Ce cas est donc impossible.

On est donc dans le deuxième cas et, de même, $\mathcal{S}$ contient le centre du cercle circonscrit à ACO, que l'on note E. Puisque $CD = CA \neq CO$ et que $D \notin \omega_{O,C}$, on sait que $D \in \ell_{C,O}$. Ainsi, D appartient aux deux droites $\ell_{B,O}$ et $\ell_{C,O}$ et, pour des raisons de symétrie, E appartient également à ces deux droites. Puisque ces deux droites ne sauraient être confondues, ce second cas est lui aussi impossible, ce qui conclut.



Cas 1 : $D \in \ell_{A,B} \cap \omega_{B,O}$



Cas 2 : $D \in \ell_{A,B} \cap \ell_{B,O}$

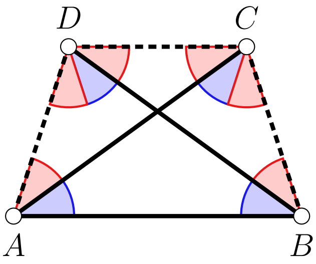
<u>*Solution alternative n°2*</u> Réutilisons les notations de la solution ci-dessus. On démontre comme précédemment qu'il existe un ensemble mignon à 6 éléments, et on procède désormais par l'absurde, en supposant que l'on dispose d'un ensemble $\mathcal{S}$ mignon à 7 éléments. Comme dans la solution précédente, on démontre que 3 points de $\mathcal{S}$ ne sont jamais alignés.

Considérons maintenant un triangle ABC, isocèle en A, dont les sommets appartiennent à $\mathcal{S}$, puis soit D un autre point de $\mathcal{S}$. Puisque les triangles ABD, BCD et CAD sont isocèles mais pas équilatéraux, on sait que D appartient à

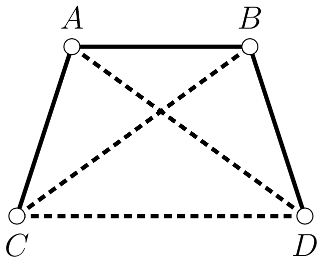
- ▷ un seul des trois ensembles $\omega_{A,B}$, $\omega_{B,A}$ et $\ell_{A,B}$;
- ▷ un seul des trois ensembles $\omega_{A,C}$, $\omega_{C,A}$ et $\ell_{A,C}$;
- ▷ un seul des trois ensembles $\omega_{B,C}$, $\omega_{C,B}$ et $\ell_{B,C}$.

Or, les cercles et droites $\omega_{A,B}$, $\omega_{B,A}$, $\omega_{B,C}$, $\omega_{C,B}$, $\ell_{A,B}$ et $\ell_{B,C}$ sont deux à deux distincts et, pris deux à deux, ont au plus deux points d'intersection. On peut donc considérer un à un tous les points D possibles.

1. Si D appartient à $\omega_{A,B} = \omega_{A,C}$ et à $\omega_{B,C}$, c'est le symétrique $C^\bullet$ de C par rapport à (AB).
2. Si D appartient à $\omega_{A,B} = \omega_{A,C}$ et à $\omega_{C,B}$, c'est le symétrique $B^\bullet$ de B par rapport à (AC).
3. Si D appartient à $\omega_{A,B} = \omega_{A,C}$ et à $\ell_{B,C}$, c'est le milieu d'un des deux arcs de cercles $\overline{BC}$ sur $\omega_{A,B}$, que l'on note M et M'.
4. Si D appartient à au moins deux médiatrices, c'est le centre O du cercle circonscrit à ABC.
5. Si D appartient à $\omega_{B,A}$ et à $\omega_{C,A}$, c'est le symétrique $A^\bullet$ de A par rapport à (BC).
6. Si D appartient à $\omega_{B,A}$, à $\ell_{A,C}$, et à aucune autre médiatrice, il ne peut appartenir à $\omega_{B,C}$, donc il appartient à $\omega_{C,B}$. On a alors $BD = BA = CA$ et $AD = CD = BC$. Ainsi, les triangles ABC et ABD sont isométriques, de même que les triangles ACD et BCD. En posant $x = \widehat{BAC}$ et $y = \widehat{CAD}$, on calcule aisément chacun des angles de la figure, de sorte que $3x + 2y = x + 4y = 180°$ (donc $x = y = 36°$) si $ABCD$ est croisé. Si $ABCD$ est non croisé, on récupère une figure totalement analogue, à l'ordre près des points, de sorte que $x = 108°$. Dans ces circonstances, on note $B^\clubsuit$ le point de concours de $\omega_{B,A}$, $\omega_{C,B}$ et $\ell_{A,C}$.
7. Si D appartient à $\omega_{C,A}$, à $\ell_{A,B}$, et à aucune autre médiatrice, la situation est totalement analogue, et $x = 36°$ ou $108°$. Il coïncide alors avec le point de concours de $\omega_{C,A}$, $\omega_{B,C}$ et $\ell_{A,B}$, que l'on note $C^\clubsuit$.



Cas 6 : $ABCD$ croisé



Cas 6 : $ABCD$ non croisé

Puisque A appartient déjà à $\ell_{B,C}$, le lemme 1 nous assure que $\mathcal{S}$ contient au plus un des points $A^\bullet$, O, M et M'. L'ensemble $\mathcal{S}$ contient donc au moins trois des quatre points $B^\bullet$, $C^\bullet$, $B^\clubsuit$ et $C^\clubsuit$, ce qui signifie que $x = 36°$ ou $108°$. En répétant ce raisonnement pour chaque triangle, on en conclut que tout triangle a pour angles $36°$ et $108°$, ou bien $36°$ et $72°$.

Mais alors, si un segment $[AB]$ est situé sur l'enveloppe convexe de $\mathcal{S}$, les cinq autres points $P_1, P_2, \ldots, P_5$ de $\mathcal{S}$ sont situés dans un même demi-plan délimité par (AB), et tout angle $\widehat{P_iAB}$ vaut 36°, 72° ou 108°. Ainsi, deux de ces angles sont égaux, donc on a trois points alignés, ce qui contrevient au lemme 1 et conclut.

<u>*Solution alternative n°3*</u> Voici une autre manière de démontrer que tout ensemble mignon compte au plus 6 éléments. Comme ci-dessus, on procède par l'absurde, et l'on suppose que l'on dispose d'un ensemble $\mathcal{S}$ mignon à 7 éléments. Une fois de plus, on démontre que 3 points de $\mathcal{S}$ ne sont jamais alignés.

Le *score* d'un point A de $\mathcal{S}$ est le nombre de segments $[BC]$ à extrémités dans $\mathcal{S}$ tels que ABC soit isocèle en A. Puisqu'il existe $\binom{7}{3} = 35$ triangles isocèles (mais pas équilatéraux) à sommets dans $\mathcal{S}$, la somme des scores des sommets vaut 35. Comme $\mathcal{S}$ compte 7 sommets, l'un d'entre eux, disons O, est de score $s \geqslant 5$.

Or, le score de O ne peut pas être dû à s segments d'extrémités deux à deux distinctes. Il existe donc trois points A, B et C dans $\mathcal{S}$ tels que $AO = BO = CO$. Sans perte de généralité, on suppose même $AB = AC \neq BC$. On pose alors $AO = x$, $AB = y$ et $BC = z$, et l'on sait que x, y et z sont deux à deux distincts.

Supposons maintenant que $\mathcal{S}$ contient un point $D \neq O$ qui n'est pas sur $\omega_{O,A}$. La médiatrice $\ell_{B,C}$ contient déjà A et O, donc ne contient pas D. Sans perte de généralité, on suppose donc que $D \in \omega_{B,C}$. Puisque OBD est isocèle et que $OB = x \neq OD$ et $BD = BC = z$, c'est donc que $OD = z$. Par ailleurs, BCD est isocèle en C mais pas équilatéral, donc $CD \neq z$. Puisque OCD est isocèle, que $OD = z \neq CD$ et que $OC = x$, c'est donc que $CD = x$. Dès lors :

- ▷ ABD est isocèle, $AB = y$ et $BD = x$, donc AD vaut x ou y ;
- ▷ AOD est isocèle, $AO = x$ et $OD = z$, donc AD vaut x ou z ;
- ▷ ACD est isocèle, $AC = y$ et $CD = z$, donc AD vaut y ou z.

On dispose ainsi d'une contradiction.

Ainsi, à l'exception de O, tout point de $\mathcal{S}$ se trouve sur $\omega_{O,A}$, mais également sur $\omega_{A,B}$, $\omega_{B,A}$ ou $\ell_{A,B}$. Or, les cercles $\omega_{A,B}$ et $\omega_{B,A}$ ont chacun deux points d'intersection avec $\omega_{O,A}$. Quant à la médiatrice $\ell_{A,B}$, elle contient déjà O, et contient donc au plus un point de $\omega_{O,A}$. Ainsi, $\mathcal{S}$ est de taille au plus six, ce qui conclut.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Malgré sa difficulté, ce problème est celui pour lequel nous avons reçu le plus de solutions. De nombreuses approches ont été tentées : considérer l'enveloppe convexe, les points extrémaux, le nombre de points sur une médiatrice ou sur un cercle, le nombre de fois qu'un point est sommet d'un triangle isocèle,. . . Si ces

approches, prises isolément, permettaient rarement de conclure, chacune donnait toutefois des informations sur la forme d'un ensemble vérifiant les contraintes de l'énoncé, et combiner ces approches permettait donc d'aboutir à une solution complète. Les solutions auxquelles nous avions pensé en proposant ce problème étaient de cette nature. Nous encourageons donc les élèves à essayer ce genre d'approche de géométrie combinatoire, et à utiliser tous les outils à leur disposition pour pouvoir croiser les informations obtenues.

Cependant, la majorité des solutions était bien différente. Les deux approches les plus suivies pour résoudre le problème étaient :

- ▷ Partir d'un triangle isocèle, et déterminer quels points peuvent être ajoutés à l'ensemble, puis exclure des choix simultanés de ces points pour montrer qu'on ne peut ajouter que 3 points, établissant ainsi la borne de 6, ou bien
- ▷ Établir une liste de toutes les configurations possibles vérifiant l'énoncé.

Ici, ces deux approches étaient effectivement réalistes. Cependant, il était aisé d'oublier accidentellement des cas, et c'est ce que beaucoup ont fait. Par exemple, la première approche nécessitait de remarquer que, dans un triangle ABC isocèle en A, la médiatrice de AB, le cercle de centre B passant par C et le cercle de centre C passant par A peuvent s'intersecter à condition que $\hat{A} = 36°$, ce que tout le monde n'a pas vu. Ces oublis ont été sévèrement sanctionnés, puisque la base de toute disjonction de cas consiste précisément à être suffisamment rigoureux pour n'oublier aucun cas.

Enfin, les correcteurs ont été surpris du nombre d'élèves qui n'ont pas repéré la configuration à six points (un pentagone et son centre), qui était pourtant apparue dans le problème 1 de l'Olympiade Internationale de 2015. Nous espérons que cette configuration rejoindra le « bagage standard » des élèves à l'avenir.

Exercice 7. On note $\mathbb{R}_{>0}$ l'ensemble des réels strictement positifs. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R}_{>0} \mapsto \mathbb{R}_{>0}$ telles que

$$f\big(x+f(xy)\big)+y=f(x)f(y)+1$$

pour tous les réels strictement positifs x et y.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> Soit f une solution éventuelle du problème. Dans la suite, on notera $\mathbf{E}_{x,y}$ l'égalité de l'énoncé. Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $f(a)=f(b)$. Les égalités $\mathbf{E}_{1,a}$ et $\mathbf{E}_{1,b}$ indiquent que

$$a=f(1)f(a)+1-f\big(1+f(a)\big)=f(1)f(b)+1-f\big(1+f(b)\big)=b,$$

ce qui signifie que f est injective.

Soit ensuite c et d deux réels tels que $0<c<d$, puis soit t un réel strictement positif. Puisque f est injective, les égalités $\mathbf{E}_{c/t,t}$ et $\mathbf{E}_{d/t,t}$ indiquent que

$$f\big(c/t+f(c)\big)=f(c/t)f(t)+1-t\neq f(d/t)f(t)+1-t=f\big(d/t+f(d)\big),$$

de sorte que $c/t+f(c)\neq d/t+f(d)$, ou encore que $f(d)-f(c)\neq(c-d)/t$. Cette dernière inégalité étant valide pour tout $t>0$, on en déduit que $f(d)\geqslant f(c)$, ce qui signifie que f est croissante.

On pose alors $p=\inf\{f(x)\colon x>0\}$ et $q=\inf\{f(x)\colon x>p\}$. Puisque f est croissante, on sait que $f(x)\to p$ lorsque $x\to 0$ et que $x>0$, et que $f(y)\to q$ lorsque $y\to p$ et que $y>p$. Un réel $y>0$ étant fixé, si on fait tendre x vers 0, on en déduit que $f(x)\to p$ et que $f(xy)\to p$, de sorte que $x+f(xy)\to p$ et que $f\big(x+f(xy)\big)\to q$. Par conséquent, l'égalité $\mathbf{E}_{x,y}$ indique que

$$y-1=f(x)f(y)-f\big(x+f(xy)\big)\to pf(y)-q,$$

ce qui signifie que $f(y)=y+(q-1)/p$.

La fonction f est donc une fonction affine, de la forme $f:t\mapsto ut+v$. Réciproquement, une fois les coefficients u et v fixés, l'égalité $\mathbf{E}_{x,y}$ indique que

$$u^2xy+ux+uv+v+y=f\big(x+f(xy)\big)+y=f(x)f(y)+1=u^2xy+uvx+uvy+v^2+1,$$

ou encore que $u(v-1)x+(uv-1)y=uv+v-v^2-1$. Cela signifie que

$$uv-u=uv-1=uv+v-v^2-1=0.$$

On en déduit que $u-1=(uv-1)-(uv-u)=0$, c'est-à-dire que $u=1$, puis que $v-1=uv-u=0$, c'est-à-dire que $v=1$. Mais alors la triple égalité

$$uv-u=uv-1=uv+v-v^2-1=0$$

est bien respectée.

En conclusion, la fonction $f\colon t\mapsto t+1$ est l'unique solution du problème.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Cet exercice était extrêmement difficile, et aucun élève (ni encadrant de la POFM) n'est parvenu à passer l'étape cruciale qui consistait à démontrer que f était croissante. Plusieurs élèves ont eu d'excellents réflexes : rechercher une solution particulière (la fonction $f\colon t\mapsto t+1$), regarder des valeurs particulières de x et y (ici, $x=1$), s'intéresser à l'injectivité de f, conjecturer que f était croissante (en repérant une infinité de valeurs $x<y$ telles que $f(x)<f(y)$), puis utiliser cette conjecture. Ces excellentes initiatives ont à peu près toutes permis à leur auteur d'obtenir quelques points.

Mentionnons cependant quelques erreurs ou maladresses évitables que les correcteurs ont repérées, dans l'espoir que les élèves les éviteront en d'autres occasions :

- Plusieurs élèves ont regardé ce qui se passait lorsque $x = 0$ ou $y = 0$. Cela leur a souvent permis de repérer la fonction $f\colon t \mapsto t+1$, ce qui était très positif. Cependant, on ne pouvait bien sûr pas se baser sur les égalités obtenues lorsque $x = 0$ ou $y = 0$ pour démontrer quoi que ce soit, puisque la fonction f n'était définie que sur $\mathbb{R}_{>0}$.
- De nombreux élèves ont regardé ce qui se passait lorsque $y = 1$, mais pas lorsque $x = 1$. D'autres ont regardé le cas où $x = 1$, mais n'ont pas pensé à en déduire l'injectivité de f, alors même qu'ils disposaient de l'égalité $f(1 + f(x)) + x = 1 + f(1)f(x)$, ce qui rendait l'injectivité de f immédiate.
- Plusieurs élèves ont regardé si l'identité ou les fonctions constantes pouvaient être solutions. Il est dommage de ne pas avoir traité directement le cas des fonctions affines, qui était aussi facile à traiter, et qui leur aurait permis d'identifier la seule solution du problème.

Exercice 8. Soit $(F_k)_{k\geqslant 0}$ la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et $F_{k+2} = F_k + F_{k+1}$ pour tout entier $k \geqslant 0$. Soit ensuite $n \geqslant 1$ un entier. Démontrer qu'il existe exactement F_{n+1} façons d'ordonner les nombres $1, 2, \ldots, n$ de manière à obtenir un n-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tel que

$$a_1 \leqslant 2a_2 \leqslant 3a_3 \leqslant \ldots \leqslant na_n.$$

Solution de l'exercice 8 On dit qu'une permutation $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ des entiers $1, 2, \ldots, n$ est *jolie* si elle satisfait les inégalités $a_1 \leqslant 2a_2 \leqslant \ldots \leqslant na_n$.

Tout d'abord, soit $\mathbf{a}$ une jolie permutation. S'il existe un entier k pour lequel $a_k \leqslant k - 2$, on choisit k minimal. Dans ces conditions, on sait que $k \geqslant 2$ et que $a_{k-1} \geqslant k - 2 \geqslant a_k$, de sorte que $a_{k-1} \geqslant a_k + 1$. On en conclut que

$$(k-1)a_{k-1} \geqslant (k-1)(a_k + 1) = ka_k + (k - a_k - 1) \geqslant ka_k + 1,$$

et donc que $\mathbf{a}$ n'est pas jolie. On en conclut donc que $a_k \geqslant k - 1$ pour tout $k \leqslant n$.

D'autre part, soit ℓ l'entier tel que $a_\ell = n$. Au vu du résultat obtenu précédemment, une récurrence descendante immédiate sur k nous assure que $a_k = k - 1$ pour tout entier k tel que $\ell + 1 \leqslant k \leqslant n$. Puisque

$$\ell n = \ell a_\ell \leqslant (\ell+1)a_{\ell+1} = (\ell+1)\ell,$$

on en conclut que $\ell \in \{n-1, n\}$.

Ainsi, pour que $\mathbf{a}$ soit jolie, on dispose a priori de deux choix :

- ▷ soit $\ell = n$, auquel cas $\mathbf{a}$ est effectivement jolie si et seulement si la permutation $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ des entiers $1, 2, \ldots, n-1$ est jolie ;
- ▷ soit $\ell = n - 1$, auquel cas $a_n = n - 1$, et alors $\mathbf{a}$ est effectivement jolie si la permutation $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ des entiers $1, 2, \ldots, n-2$ est jolie.

Par conséquent, si on note J_n le nombre de jolies permutations de $1, 2, \ldots, n$, on remarque bien que $J_n = J_{n-1} + J_{n-2}$ dès lors que $n \geqslant 3$. On conclut en vérifiant que $J_1 = 1 = F_2$ et que $J_2 = 2 = F_3$.

Solution alternative n°1 Comme précédemment, on considère une permutation $\mathbf{a}$ puis l'entier ℓ tel que $a_\ell = n$. Puisque $na_k \geqslant ka_k \geqslant \ell a_\ell = \ell n$ pour tout $k \geqslant \ell$, on sait que $\mathbf{a}$ induit une permutation de $1, 2, \ldots, \ell - 1$ et de $\ell, \ell + 1, \ldots, n$.

Si $\ell \leqslant n - 1$, soit m l'unique entier tel que $a_m = \ell$. Puisque $m \geqslant \ell$, on sait que

$$m\ell = ma_m \geqslant \ell a_\ell = \ell n,$$

donc que $m = n$. Mais alors $ka_k = \ell n$ pour tout entier k tel que $\ell \leqslant k \leqslant n$. On en déduit en particulier que $n - 1$ divise $(n-1)a_{n-1} = \ell n$, donc divise ℓ aussi, ce qui signifie que $\ell = n - 1$.

Maintenant acquis le fait que $\ell \in \{n-1, n\}$, on conclut comme précédemment.

Commentaire des correcteurs Cet exercice était difficile. Néanmoins, une bonne partie des élèves a eu la bonne idée d'essayer de trouver une relation de récurrence sur le nombre de permutations vérifiant l'énoncé et a réussi, en analysant la relation de récurrence, à comprendre la structure des permutations vérifiant l'énoncé.

Toutefois, très peu d'élèves ont réussi à formaliser cela, en particulier à montrer que l'entier ℓ défini dans la correction était bien supérieur ou égal à $n-1$. Certains ont utilisé le fait que $n(n-2) < (n-1)^2$ pour conclure dans le cas général. Si cet argument fonctionnait pour $\ell = n-2$, il était malheureusement impossible de l'adapter directement pour des ℓ quelconques.

Attention aussi à la récurrence ! Plusieurs élèves ont montré, si on note k_n le nombre de permutations de $\{1, \ldots, n\}$ vérifiant l'énoncé, que $k_n = k_{n-1} + k_{n-2}$. Ils ont ensuite fait une récurrence forte, initialisée à $n = 1$, pour prouver que $k_n = F_{n+1}$. Ici pour $n = 2$, la formule $k_2 = k_1 + k_0$ n'a pas de sens car k_0 n'est même pas défini. Ce raisonnement par récurrence ne permettait donc pas de prouver que $k_2 = F_3$, et il aurait fallu traiter cette égalité dans le cadre de l'initialisation de notre récurrence. Ici, pour éviter cette erreur, il valait mieux faire une récurrence double, qui nécessite explicitement d'initialiser à $n = 1$ et $n = 2$.

Exercice 9. Soit n un entier naturel. Démontrer que l'écriture de l'entier $n(2^n-1)$ en base 2 compte exactement n occurrences du chiffre 1.

Solution de l'exercice 9 Notons s_n l'entier $n(2^n-1)$. Puisque $s_0=0$ et $s_1=1$, l'énoncé est bien vérifié lorsque $n \leqslant 1$. On suppose donc désormais que $n \geqslant 2$.

On pose alors $t=2^n-n$ et $s=n-1$, de sorte que $n(2^n-1)=2^n s+t$ et que $s+t=2^n-1$. En vertu du binôme de Newton, on sait que $2^n \geqslant (1+1)^n \geqslant \binom{n}{0}+\binom{n}{1}=n+1$. Ainsi, s et t sont deux entiers naturels de somme 2^n-1. Par conséquent, ils s'écrivent respectivement comme

$$\overline{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_0}^2 \text{ et } \overline{b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_0}^2$$

en base 2, et on est assuré que $a_i+b_i=1$ pour tout $i \leqslant n-1$.

En outre, comme $t<2^n$, l'écriture de $2^n s+t$ en base 2 commence avec les n chiffres de s puis se termine avec les n chiffres de t. L'entier $n(2^n-1)=2^n s+t$ s'écrit donc

$$\overline{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_0 b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_0}^2$$

en base 2. La somme de ces chiffres vaut donc $(a_0+b_0)+(a_1+b_1)+\ldots+(a_{n-1}+b_{n-1})=n$, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs Cet exercice était difficile. Le point crucial consistait à repérer que les $k^{\text{ème}}$ et $(n+k)^{\text{ème}}$ chiffres de $n(2^n-1)$ étaient un 0 et un 1, ce qu'une étude systématique des petits cas (disons, jusqu'à 8) aurait pu aider à constater. La seule élève qui a remarqué ce phénomène est également la seule qui a fourni une solution complète.

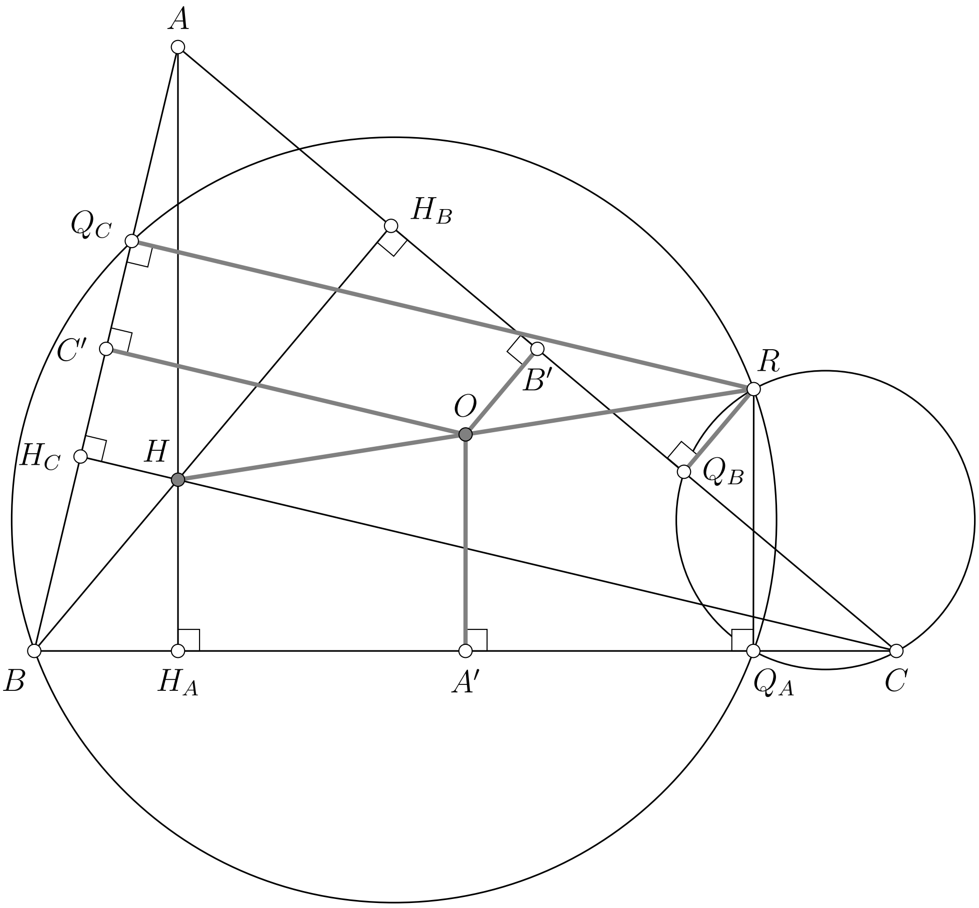
Par ailleurs, il est dommage que plusieurs élèves, ayant eu la bonne idée d'écrire 2^n-1 en base 2, aient ensuite prématurément affirmé que tout nombre de la forme $k(2^n-1)$ contenait n occurrences du chiffre 1 quand on l'écrivait en base 2 : ceci n'est vrai que si $1 \leqslant k \leqslant 2^n$. Toute preuve censée fonctionner pour tout entier k était donc vouée à l'échec, ce qui était prévisible en regardant le cas où $n=1$.

Exercice 10. Soit ABC un triangle. On note H_A le pied de la hauteur de ABC issue de A, et A' le milieu du segment $[BC]$. On note ensuite Q_A le symétrique de H_A par rapport à A'. On définit de même les points Q_B et Q_C. Enfin, on note R le point d'intersection, autre que Q_A, entre les cercles circonscrits aux triangles Q_AQ_BC et Q_ABQ_C.

Démontrer que les droites (Q_AR) et (BC) sont perpendiculaires.

Solution de l'exercice 10 Soit H l'orthocentre de ABC, O le centre du cercle circonscrit à ABC, et R' le symétrique de H par rapport à O. Les projetés orthogonaux de H et O sur (BC) sont H_a et A', donc le projeté orthogonal de R' sur (BC) est Q_A. De même, les projetés orthogonaux de R' sur (CA) et sur (AB) sont Q_B et Q_C.

Cela signifie entre autres que $\widehat{CQ_AR'} = \widehat{QC_BR'} = 90°$, donc que Q_A et Q_B appartiennent au cercle de diamètre $[CR']$. Ce cercle coïncide donc avec le cercle circonscrit à Q_AQ_BC. De même, les points Q_A et Q_C appartiennent au cercle de diamètre $[BR']$, qui coïncide avec le cercle circonscrit à Q_ABQ_C. Par conséquent, les points R et R' sont confondus, et (Q_AR) est bien perpendiculaire à (BC).



Solution alternative n°1 Ci-dessous, on note Γ_A, Γ_B et Γ_C les cercles circonscrits respectifs à AQ_BQ_C, Q_ABQ_C et Q_AQ_BC. Puisque R appartient à Γ_B et à Γ_C, on sait que

$$(Q_CA, Q_CR) = (Q_CB, Q_CR) = (Q_AB, Q_AR) = (Q_AC, Q_AR) = (Q_BC, Q_BR) = (Q_BA, Q_BR).$$

Cela signifie que R appartient aussi à Γ_A, et donc que A, B et C jouent des rôles symétriques.

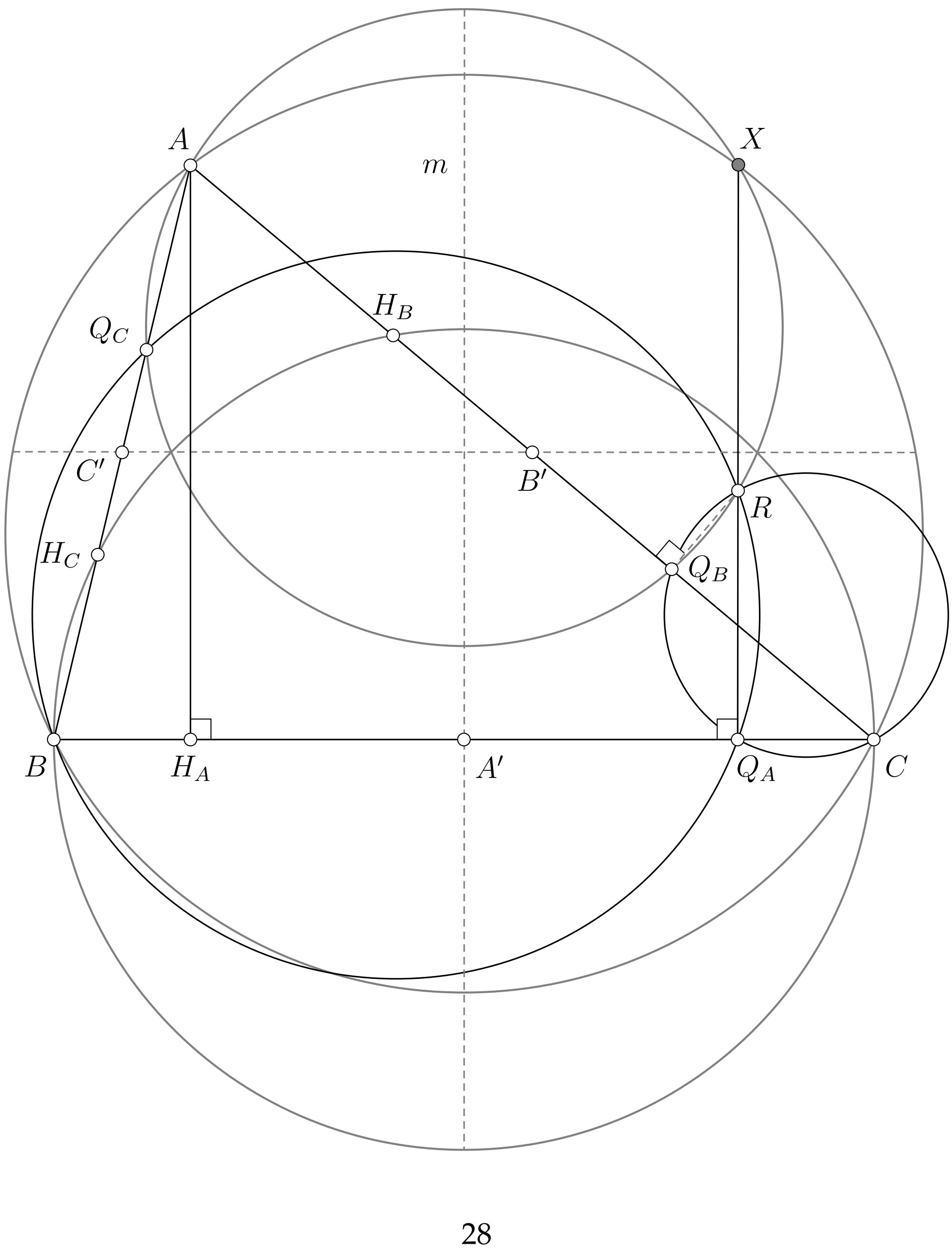
Forts de ce constat, on introduit donc également le cercle circonscrit à ABC, que l'on note Ω. Toujours à la recherche de cercles remarquables, on remarque alors que les angles droits en H_A, H_B et H_C suggèrent aussi de tracer les cercles Ξ_A, Ξ_B et Ξ_C, de diamètres respectifs $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

Enfin, si l'on note m la médiatrice de $[BC]$, l'énoncé nous demande de démontrer que (Q_AR) et (AH_A) sont symétriques l'une de l'autre par rapport à m. On s'intéresse donc de plus près à la symétrie d'axe m et aux cercles dont m est un axe de symétrie : il s'agit des cercles Ω, Ξ_A et, ne serait-ce qu'en apparence, Γ_A.

À défaut de démontrer que le centre de ce dernier cercle se trouve sur m, on peut tenter de démontrer que les axes radicaux de Γ_A avec Ω ou Ξ_A sont parallèles à (BC). Le premier serait alors manifestement la parallèle à (BC) passant par A, tandis que le deuxième a l'air d'être la droite $(B'C')$.

Comme B' est le milieu de $[AC]$ et de $[H_BQ_B$, on sait que $B'H_B \cdot B'C = B'Q_B \cdot B'A$, ce qui signifie bien que B' appartient à l'axe radical de Γ_A et Ξ_A. De même, C' appartient à cet axe radical, qui est donc confondu avec $(B'C')$, de sorte que Γ_A est bien symétrique par rapport à m.

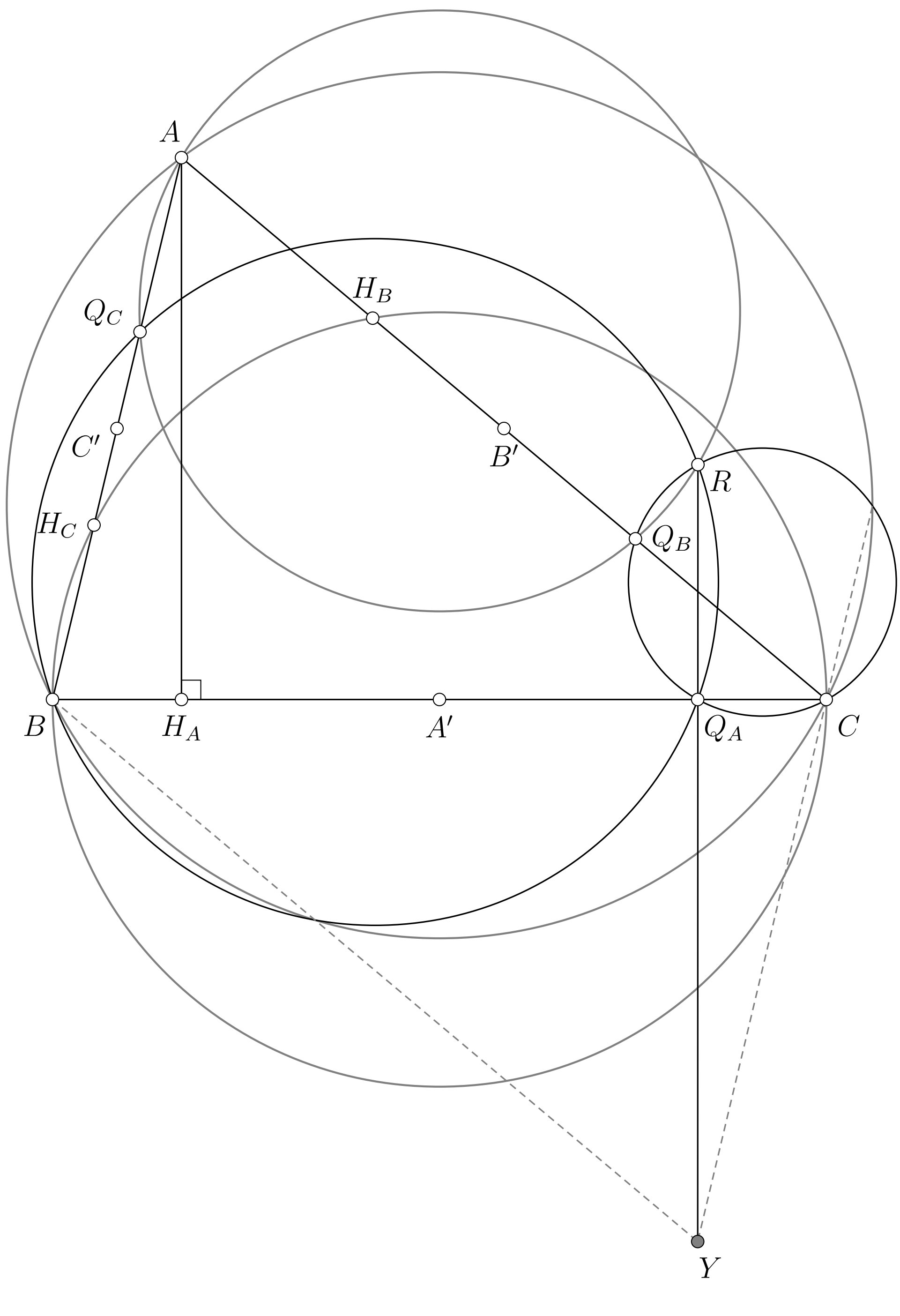
Par conséquent, les cercles Ω et Γ_A se rencontrent en un point X qui n'est autre que le symétrique de A par rapport à m. Notons alors R' le point d'intersection entre (Q_AX) et Γ_C. On sait que $\widehat{CQ_BR'} = \widehat{CQ_AR'} = 90°$. Puisque l'on a également $\widehat{AXR'} = 90°$, le point R' est donc diamétralement opposé à A dans le cercle circonscrit à AQ_BX. Cela démontre que R' appartient à Γ_A, donc coïncide avec R, ce qui conclut.



Solution alternative n°2 On reprend les notations de la solution précédente. Puisque la droite (Q_AR) est l'axe radical des cercles Γ_B et Γ_C, il est tentant de rechercher les axes radicaux de ces deux cercles avec un autre cercle. À cette fin, on pourrait considérer le cercle Γ_A, et constater comme précédemment que R est le centre radical des trois cercles Γ_A, Γ_B et Γ_C. Au vu de cette symétrie des rôles, on considère également le cercle Ω, et on note alors Y le centre radical de Γ_B, Γ_C et Ω.

Il semble que $BACY$ soit un parallélogramme, et on entreprend donc de le démontrer. Pour ce faire, on procède comme dans la solution précédente. Puisque A' est le milieu de $[BC]$ et de $[H_AQ_A]$, il a même puissance par rapport à Γ_C et Ξ_C. De même, B' a même puissance par rapport à Γ_C et Ξ_C. On en déduit que $(A'B')$ est l'axe radical de Γ_C et Ξ_C. Puisque (AB) est l'axe radical de Ξ_C et Ω et que (AB) est parallèle à $(A'B')$, on en déduit que (AB) est parallèle au troisième axe radical (CY) entre Γ_C et Ω. De même, (AC) est parallèle à (BY).

La symétrie de centre A' échange donc la droite (AH_A) avec (YQ_A), c'est-à-dire avec (Q_AR). La droite (Q_AR) est donc bien perpendiculaire à (BC).



Commentaire des correcteurs Très peu de points ont été distribués sur cet exercice, pour lequel aucune élève n'a proposé de solution complète. Les correcteurs tiennent toutefois à saluer les nombreuses tentatives qui ont été rendues, témoignant d'un réel effort de recherche sur le problème.

Bien souvent, les relations établies autour des points H_A, H_B et H_C sont tout à fait correctes, et nous encourageons les élèves à les retenir car elles sont vraies et applicables dans de nombreux contextes. Toutefois ici, elles ne suffisaient pas à elles seules à se rapprocher de la solution et ne rapportaient donc pas de points.

L'exercice nécessitait un peu de recul sur la définition des points Q_A, Q_B et Q_C. De rares élèves ont pu donc rajouté de la symétrie au problème en montrant que le point R défini appartenait également au cercle Γ_C. C'est en examinant les nombreuses symétries offertes par la figure qu'il était possible d'acquérir l'intuition des nombreuses propriétés sur le point R, comme le fait qu'il s'agit du symétrique de H par rapport à O.

Voici quelques éléments récurrents dans les solutions proposées :

▷ Quelques élèves ont identifié la droite (Q_AR) comme un axe radical. C'est en effet le point de départ d'une approche possible. Il aurait fallu prolonger cet axe radical pour en deviner quelques propriétés ou pour introduire d'autres points intéressants y appartenant, par exemple le symétrique du point A par rapport à A'.

▷ Quelques élèves ont prétendu rendre une solution complète mais qui ne fonctionnait en réalité pas. Pour éviter de tomber dans cet écueil, il est important de se relire et de vérifier que chaque affirmation est vraie et justifiée. Une autre façon de se relire est de vérifier que toutes les hypothèses de l'énoncé ont été utilisées.

  Par exemple, le fait de n'avoir utilisé l'appartenance du point R qu'à un seul des deux cercles doit mettre sur la piste que l'on a été trop vite.