PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 4 : COMBINATOIRE
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 27 FÉVRIER 2021

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2006 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

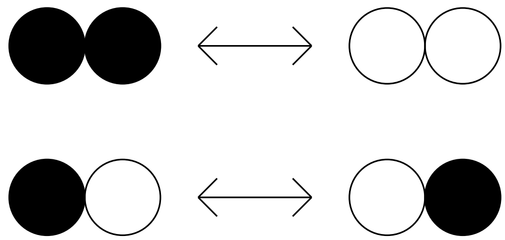
Exercice 1. La classe d'Aline contient trente élèves, tous de tailles différentes. Pour la photo de classe, afin que tout le monde soit bien visible, il faut que les dix plus petits élèves de la classe soient placés au premier rang et les dix grands élèves soient placés au dernier rang (les dix élèves restants sont donc au milieu). Combien y a-t-il de façon de répartir les élèves sur les trente places disponibles en respectant ces conditions ?

Solution de l'exercice 1 Tout d'abord, il faut répartir les dix plus petits élèves sur la première rangée. Il y a pour cela $10 \times 9 \times 8 \times \ldots 2 \times 1 = 10!$ façons de procéder (il y a 10 places pour le premier élève, puis 9 places pour le suivant, etc...). De la même façon, il y a $10!$ façons de placer les 10 plus grands élèves sur le dernier rang $10!$ façons de placer les 10 élèevs restants sur la rangée du milieu. Ces répartitions étant indépendantes, il y a donc $(10!)^3$ façons de répartir les élèves comme désiré.

Commentaire des correcteurs : Presque tous les élèves ont eu 7 points. Une seule étourderie (rare) : multiplier $10!$ par 3 au lieu de mettre puissance 3.

Exercice 2. 50 pièces sont disposées en ligne droite. Chaque pièce possède une face noire et une face blanche. Au départ, les faces apparentes des pièces sont toutes noires. Une opération consiste à retourner (et donc changer la couleur de la face apparente) deux pièces voisines. Est-il possible qu'après un nombre fini d'opérations, il y ait exactement 25 pièces dont la face apparente est blanche ?

Solution de l'exercice 2 L'exercice encourage à rechercher un invariant ici. Etant données deux pièces voisines, les opérations possibles sont les suivantes :



La double flèche signifiant que l'opération est possible dans les deux sens. Par une telle opération, le nombre de pièces dont la face apparente est blanche peut soit rester inchangé (premier dessin), soit augmenter ou diminuer de 2 (deuxième dessin). La partié du nombre de pièces blanches reste donc inchangé par les opérations autorisées. Puisque le nombre de pièces blanches est pair dans la situation initiale, il ne peut être impaire après un nombre fini d'opération. Il est donc impossible d'avoir exactement 25 pièces blanches.

Commentaire des correcteurs : La démonstration est correcte pour presque tous les élèves ayant proposé une solution. Seuls quelques uns manquent la formalisation ou oublient des cas.

Exercice 3. 42 élèves sont placés en ligne. Paul donne à chaque élève un certain nombre strictement positif de cailloux. On suppose que chaque élève a strictement plus de cailloux que son voisin de droite (sauf l'élève tout à droite de la file). Combien de cailloux Paul a-t-il distribué en tout, au minimum ?

Solution de l'exercice 3 L'exercice demande de trouver un minimum, il y a donc inévitablement deux étapes : l'analyse pendant laquelle on détermine une valeur minimum de cailloux et la construction pendant laquelle que le minimum trouvé dans l'analyse est bien réalisable.

On note a_k le nombre de cailloux que reçoit le $k-$ème élève en partant de la droite.
L'élève le plus à gauche de la file doit recevoir au moins 1 caillou, donc l'élève à sa droite doit en avoir au moins 2 pour avoir strictement plus. On démontre ainsi par récurrence sur $k \leqslant 42$ que $a_k \geqslant k$.

L'initialisation a déjà été faite. On suppose désormais que $a_k \geqslant k$ pour un certain entier $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Puisque le $k+1-$élève doit avoir strictement plus de cailloux que son voisin de droite, on a $a_{k+1} > a_k \geqslant k$, donc $a_{k+1} \geqslant k+1$, ce qui achève la récurrence.

Paul doit donc distribuer au moins $\sum_{k=1}^{42} a_k \geqslant \sum_{k=1}^{42} k = \frac{42 \cdot 43}{2} = 903$ cailloux.

Réciproquement, si Paul donne k bonbons exactement au $k-$ème élève en partant de la gauche, il respecte bien la condition donnée et donnera en tout 903 cailloux.
Le minimum est donc 903.

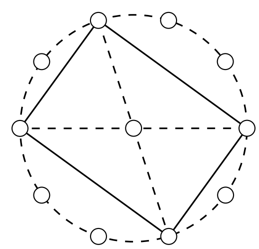
Commentaire des correcteurs : Tous les élèves ayant rendu l'exercice ont compris les enjeux de celui-ci, mais rares sont ceux qui ont réussi à fournir une solution correcte. En effet deux types de cas se présentent :

— Certains ont montré que le i-ième élève avait au moins i cailloux pour $1 \leqslant i \leqslant 42$ par récurrence ou en itérant leur raisonnement, et en ont déduit que Paul avait donné au moins 903 cailloux. Ce raisonnement est vrai, mais il n'assure pas que 903 est le minimum : j'aurais pu tout aussi bien dire qu'il avait donné au moins un caillou à chacun donc 42 cailloux, et en déduire que 42 est le minimum. Pour montrer qu'un nombre est la valeur minimum de telle quantité il faut montrer deux choses : que la quantité vaut au moins cette valeur ET qu'il existe une réalisation où la quantité a cette valeur. Ici il fallait mentionner qu'en donnant i cailloux à l'élève i pour i entre 1 et 42, Paul donne 903 cailloux, et la distribution de cailloux vérifie les conditions de l'énoncé.

— Certains ont essayé de "minimiser localement" le nombre de cailloux : Paul ayant pour objectif de donner un nombre minimum de cailloux, il donne un nombre minimum de caillou à la première personne, puis à la seconde etc. Le problème, c'est que souvent dans des problèmes où on veut minimiser une quantité, chercher à minimiser au fur et à mesure peut conduire à des résultats faux. Par exemple voici le jeu suivant : étant donné 3 billets, un de 50 euros, un de 10 euros un de 5 euros. Alice choisit le premier billet que tu prends puis Bob prend celui qu'il veut et Alice le dernier, sauf si Alice as pris le billet de 10 euros, dans ce cas Bob prends celui de 5. Ici pour maximiser il vaut mieux prendre le billet de 10 euros d'abord. Et bien là ça pourrait être pareil : par exemple si la règle était Paul donne au moins 1 caillou à chaque élève, et si un élève a un caillou, son voisin de droite en a 2000, le minimum était de donner 2 cailloux à chaque élève sauf le dernier, alors que si on cherche à minimiser dans l'ordre, on voudrait donner 1 caillou au premier élève, alors que c'est sous-optimal.

Exercice 4. On colorie les sommets d'un $100-$gone régulier avec 10 couleurs. Montrer qu'il y a 4 sommets qui forment un rectangle et qui sont coloriés avec au plus 2 couleurs.

Solution de l'exercice 4 Le résultat demandé est un résultat d'existence, on peut donc essayer d'appliquer le principe des tiroirs à des objets bien choisis. Un rectangle est caractérisé par le fait que ses diagonales passent par le centre du cercle dans lequel il est inscrit. Il suffit donc de se concentrer sur ces diagonales.



Il y a 50 diagonales distinctes passant par le centre du $100-$gone. Dans la suite, on les appelle des *diamètres*. Etant donnés deux diamètres, les sommets aux extrémités forment un rectangle à deux couleurs, soit parce que dans chaque diamètre les deux extrémités sont de même couleur (le diamètre est alors *monochrome*), soit parce que les deux couleurs coloriant les deux extrémités de chaque diamètres sont les mêmes.

Si on a deux diamètres monochromes parmi les 50 diagonales, on obtient 4 sommets formant un rectangle dont les sommets sont d'au plus deux couleurs.

On suppose désormais qu'on a au plus un diamètre monochrome. Il y a $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ façons de choisir 2 couleurs distinctes parmi les 10 données (10 choix pour la première, 9 choix pour la deuxième et l'ordre du choix des couleurs n'importe pas). Il y a au moins 49 diamètres joignant deux sommets de couleurs distinctes. D'après le principe des tiroirs, on a deux diamètres dont les sommets sont deux à deux de même couleur. Les quatre sommets forment donc un rectangle vérifiant la propriété de l'énoncé.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est bien réussi, attention à ne pas oublier les diagonales dont les deux sommets sont d'une seule couleur.

Exercice 5. Soit n un entier impair et $x_1, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts. Montrer qu'on peut répartir les nombres de l'ensemble $\{|x_i - x_j|, i < j\}$ dans deux sous-ensembles disjoints A et B de telle sorte que la somme des éléments de A soit égale à la somme des éléments de B.

Solution de l'exercice 5

On commence par examiner l'énoncé pour des petites valeurs de n. Pour $n = 1$, il n'y a rien à faire. Pour $n = 3$, on a 3 réels x_1, x_2 et x_3 que l'on peut ordonner par $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$ sans perte de genéralité. On a alors une partition commode en deux sous-ensembles $\{x_3 - x_2, x_2 - x_1\}$ et $\{x_3 - x_1\}$.

Pour traiter le cas $n = 5$, on pourrait s'aider de ce que l'on a déjà construit avec $n = 3$. Ceci nous donne l'idée de traiter l'exercice par récurrence sur n.

On a déjà traité le cas $n = 3$, on suppose donc que l'énoncé est vrai pour un entier $n \geqslant 3$ impair et on essaye de montrer qu'il est vrai avec $n + 2$ réels.

Soient $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant x_{n+2}$ des réels. D'après l'hypothèse de récurrence, on dispose d'un partition de l'ensemble $\{|x_i - x_j|, 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$ en deux sous-ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de même somme. Il s'agit de répartir les différences $x_{n+1} - x_i, x_{n+2} - x_i$ et $x_{n+2} - x_{n+1}$ dans ces deux ensembles (avec $1 \leqslant i \leqslant n$).

Pour deviner comment procéder, on peut regarder le cas $n = 5$ où il s'agit de répartir les différences

$x_5 - x_4$	
$x_5 - x_3$	$x_4 - x_3$
$x_5 - x_2$	$x_4 - x_2$
$x_5 - x_1$	$x_4 - x_1$

Ici, on peut par exemple mettre dans l'ensemble $\mathcal{A}$ les différences $x_5 - x_2$ et $x_4 - x_1$ et dans l'ensemble B les différences $x_5 - x_1$ et $x_4 - x_2$. On a ajouté à chaque ensemble la somme $x_5 + x_4 - x_1 - x_2$. Puis, on peut attribuer à l'ensemble $\mathcal{A}$ la différence $x_5 - x_3$ et à l'ensemble $\mathcal{B}$ les différences $x_5 - x_4$ et $x_4 - x_3$ et les ensembles restent de même somme.

Généralisons ce proécédé pour notre hérédité. Puisque n est impair, on dispose d'un entier k tel que $n = 2k + 1$. On attribue à l'ensemble $\mathcal{A}$ les différences $x_{n+2} - x_{2i}, x_{n+1} - x_{2i-1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$. Puis, on attribue à l'ensemble $\mathcal{B}$ les différences $x_{n+2} - x_{2i-1}, x_{n+1} - x_{2i}$, pour $1 \leqslant i \leqslant k$. On vérifie que les deux ensembles restent de même somme. Il ne nous reste plus qu'à attribuer les différences $x_{n+2} - x_n, x_{n+1} - x_n$ et $x_{n+2} - x_{n+1}$. On attribue donc les différences $x_{n+2} - x_{n+1}$ et $x_{n+1} - x_n$ à l'ensemble $\mathcal{A}$ et la différence $x_{n+2} - x_n$ à l'ensemble $\mathcal{B}$. Les deux ensembles sont de même somme, ce qui achève la récurrence.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est bien compris par la majorité des élèves.

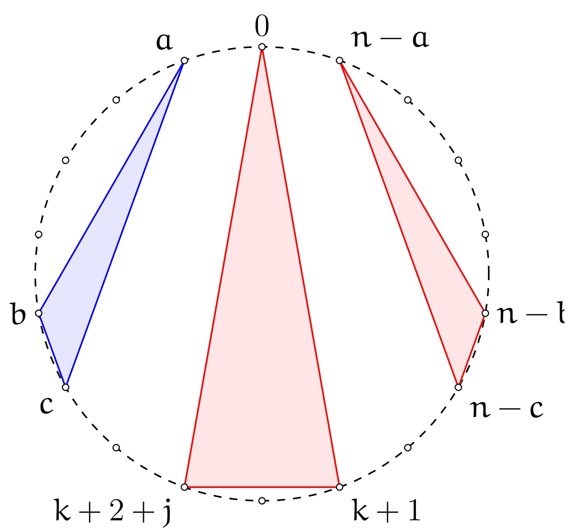
Exercice 6. Soit $n \geqslant 3$ un entier. On place n points sur un cercle. Chacun à leur tour, Noémie et Paul doivent tracer un triangle dont les sommets sont parmi les points qui ne sont pas les sommets d'un triangle déjà tracé et dont les côtés ne coupent pas les côtés des triangles déjà tracés. Le premier joueur à ne plus pouvoir jouer a perdu. Si Noémie commence, lequel des deux joueurs dispose d'une stratégie gagnante ?

Solution de l'exercice 6 En examinant l'énoncé pour des petites valeurs de n, on se rend compte que Noémie dispose d'une stratégie gagnante. On essaye donc de montrer que c'est toujours le cas.

Notons que, quitte à déplacer les points le long du cercle, on peut supposer que le $n-$gone est régulier. On numérote alors les sommets de 0 à $n-1$ dans le sens trigonométrique.

L'idée est d'employer une stratégie dite "miroir", c'est-à-dire une stratégie dans laquelle Noémie est en position d'effectuer le même mouvement que son adversaire, de sorte que tant que Paul peut jouer, Noémie le peut aussi et donc Paul sera le premier à ne plus pouvoir effectuer de mouvement.

Pour cela, Noémie va essayer, lors de son premier tour, de séparer le $n-$gone en deux parties symétriques par rapport à un axe. Dans ce but, on écrit $n-3 = 2k+j$, avec $j = 0$ ou 1. Noémie trace alors le triangle ABC dont les sommets ont pour numéro $0, 1+k$ et $2+k+j$. Le petit arc AB contient donc k sommets, le petit arc BC en contient j et le petit arc CA en contient k. Dans la suite du jeu, un triangle tracé a ses trois sommets qui appartiennent au même arc. Puisque l'arc BC contient au plus un sommet, on ne peut pas tracer de triangle avec l'éventuel sommet de cet arc.



Dans la suite, si Paul trace un triangle en employant les sommets a, b, c, et disons que ces sommets appartiennent à l'arc AB, alors Noémie trace un triangle symétrique avec les sommets $n-a, n-b$ et $n-c$ dans l'arc BC.
En appliquant cette stratégie, on obtient de proche en proche que tant que Paul peut tracer un triangle valide, Noémie le peut également, ce qui lui donne la stratégie gagnante voulue.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est bien compris ! La grande majorité des élèves a su fournir la stratégie gagnante. Les dessins, souvent très éloquents sur la stratégie, ont été appréciés.

Exercice 7. On considère $2n$ entiers strictement positifs. Un *couplage* est une répartition de ces entiers en n paires d'entiers deux à deux disjointes. Par exemple, $\{(1,3),(5,7)\}$ est un couplage des entiers $1,3,5,7$. En revanche, $\{(1,3),(3,7)\}$ n'est pas un couplage des entiers $1,3,5,7$. Un couplage est dit *sans carré* si le produit des deux nombres dans chaque paire n'est jamais un carré parfait. Montrer que s'il existe un couplage sans carré, il en existe au moins $n!$.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u>

On commence par examiner l'énoncé pour des petites valeurs de n.
Si $n = 1$, $n! = 1$ et l'énoncé est trivial.

On suppose ici que $n = 2$. On note a, b, c et d les quatre entiers et on suppose sans perte de généralité que $\{(a,b),(c,d)\}$ est un couplage sans carré. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins l'un des quatre entiers. Si cet ensemble est vide, cela signifie que $a = b = c = d = 1$ et donc tout couplage est parfait. On peut donc désormais supposer que $\mathcal{P}$ est non vide. Le fait que ab ne soit pas carré signifie que l'on dispose d'un nombre premier p de $\mathcal{P}$ tel que $v_p(a) + v_p(b)$ est impair et donc que $v_p(a)$ et $v_p(b)$ n'ont pas la même parité. On peut par exemple supposer que $v_p(a)$ est pair et $v_p(b)$ impair.

— Si $v_p(c)$ et $v_p(d)$ ne sont pas de la même parité, par exemple $v_p(c)$ est pair alors que $v_p(d)$ est impair, alors le couplage $\{(a,d);(b,c)\}$ est sans carré car $v_p(a) + v_p(d)$ et $v_p(b) + v_p(c)$ sont impairs.

— On suppose désormais que $v_p(c)$ et $v_p(d)$ sont de même parité, disons pairs. On dipose d'un nombre premier $q \in \mathcal{P}$ tel que $v_q(c) + v_q(d)$ est impair, et on peut supposer que $v_q(c)$ est impair et $v_q(d)$ est pair. Si $v_q(a) + v_q(b)$ est impaire, alors on peut conclure de la même façon que précédemment. Sinon, $v_q(a)$ et $v_q(b)$ sont de même parité. S'ils sont tous les deux pairs, alors $\{(a,c);(b,d)\}$ est sans carré car $v_q(a) + v_q(c)$ est impair et $v_p(b) + v_p(d)$ est impair. S'ils sont tous les deux impairs, alors de même $\{(a,d);(b,c)\}$ est sans carré.

On a exhibé $2!$ couplages dans tous les cas, ce qui montre l'énoncé dans le cas où $n = 2$.

On comprend que l'on doit jouer avec la parité des valuations $p-$adiques des entiers considérés. Essayons d'utiliser ce que nous venons de faire pour traiter l'exercice par récurrence.

On suppose que l'énoncé est vrai pour tout $2(n-1)-$uplet d'entiers strictement positifs, avec $n-1 \geqslant 2$. On considère $2n$ entiers strictement positifs tel qu'on peut former au moins un couplage sans carré à partir de ces $2n$ entiers. On note $\{(a_1,a_2);(a_3,a_4);\ldots;(a_{2n-1},a_{2n})\}$ ce couplage.
On fixe $1 \leqslant i \leqslant (n-1)$ un entier et on considère les paires (a_1,a_2) et (a_{2i+1},a_{2i+2}). D'après le cas $n = 2$, on dispose d'un autre couplage parfait de ces deux paires, noté $\{(a_1,a_j);(a_2,a_k)\}$ avec $\{j,k\} = \{2i+1, 2i+2\}$. On dispose donc d'un couplage parfait des $2(n-1)$ entiers a_ℓ, avec $\ell \neq 1, j$. Par hypothèse de récurrence, on a donc au moins $(n-1)!$ couplages sans carré distincts avec ces nombres. On obtient donc $(n-1)!$ couplages sans carré des $2n$ entiers, composés de la paire (a_1,a_j) et des $n-1$ paires obtenues avec un couplage sans carré des $2(n-1)$ entiers précédents. On appelle ces couplages des $i-$couplages.

Etant donné que l'on a $n-1$ choix pour l'entier i et que si $i \neq j$, un $i-$couplage est distinct d'un $j-$couplage (puisque dans un $i-$couplage a_1 est couplé avec un entier de la paire (a_{2i+1},a_{2i+2}) et dans un $j-$couplage, a_1 est couplé avec un entier de la paire (a_{2j+1},a_{2j+2})), on obtient $(n-1)\cdot(n-1)!$ couplages sans carré distincts.

Enfin, on dispose, toujours par hypothèse de récurrence, d'au moins $(n-1)!$ couplages sans carré des entiers $a_3,\ldots,a_{2n}$, distincts des couplages générés précédemment. On a donc en tout $(n-1)\cdot(n-1)! + (n-1)! = n!$ couplages distincts, ce qui achève la récurrence et conclut l'exercice.

<u>*Commentaire des correcteurs :*</u> Peu d'élèves ont rendu une tentative mais la majorité des preuves présentées est correcte. Certains ont changé le problème en problème de graphe ce qui était une bonne idée !

Exercice 8. La ville de Metropolis compte n rues, qui sont toutes des lignes droites. Chaque paire de rue a un point d'intersection, et trois rues ne sont jamais concourantes. Le conseil municipal souhaite, à chaque intersection, décider quelle rue aura la priorité sur l'autre. Cependant, afin d'éviter les excès de vitesse, le conseil souhaite qu'une même rue ne soit jamais prioritaire à deux intersections consécutives. Démontrer que ce souhait est réalisable.

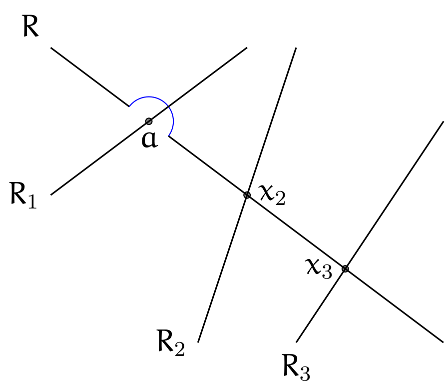
Solution de l'exercice 8

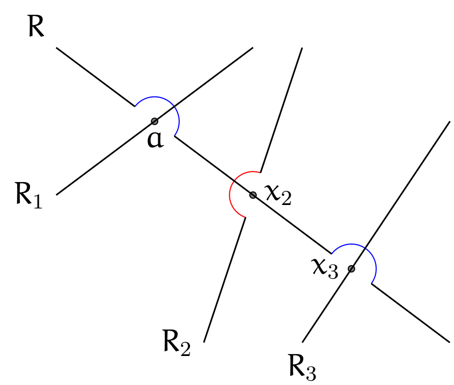
On va présenter deux solutions possibles : une basée sur une analyse des possibilités pour les priorités, une par un coloriage.

Solution n°1 :

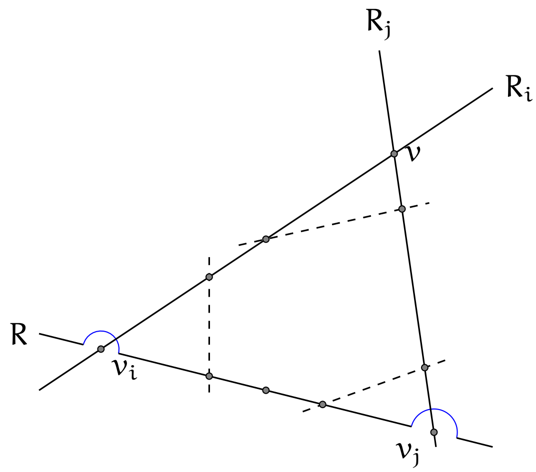
Notons que si le souhait est possible pour une certaine configuration des priorités aux croisements, alors les différentes priorités attribuées vérifient l'énoncé si on change toutes les priorités.

Prenons R une rue et a le premier croisement de R avec une autre rue. D'après la remarque précédente, s'il existe une configuration répondant aux consignes, il en existe au moins deux et l'une d'entre elles vérifie que l'intersection est prioritaire pour la rue R. On peut donc supposer que ce croisement a est prioritaire pour la rue. Ceci impose la priorité sur les autres intersections : si on note $x_1 = a, \dots, x_{n-1}$ les croisements, alors l'intersection x_i est prioritaire pour la rue R si et seulement si i est impair pour vérifier la consigne. De même, pour tout i entre 1 et $n-1$, la rue qui contient x_i qu'on note R_i a ses différentes priorités imposées : si l'intersection en commun avec R est prioritaire pour R, un croisement est prioritaire pour R_i si et seulement s'il y a un nombre pair d'intersections entre lui et a (a et lui-même sont considérés comme des croisements entre lui et a), sinon un croisement est prioritaire pour R_i si et seulement s'il y a un nombre impair d'intersections entre lui et a.



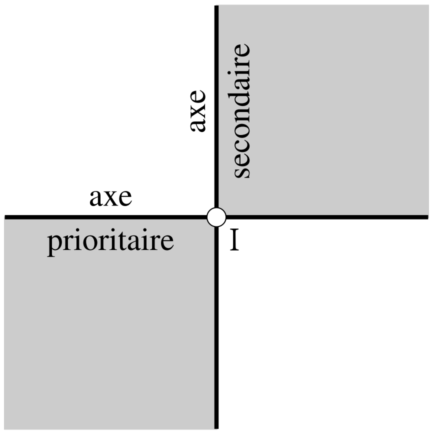


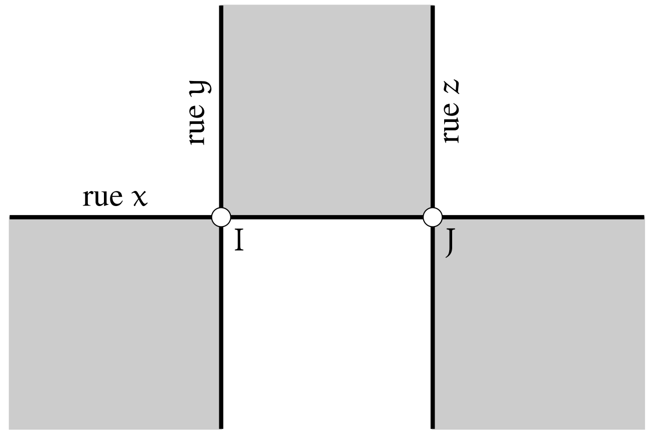
La construction précédente semble donc être la seule qui puisse marcher : vérifions qu'elle marche. A priori elle vérifie toutes les conditions, le seul problème étant qu'il peut y avoir une intersection hors de R avec deux routes prioritaires, ou deux routes non prioritaires (la condition d'alternance priorité non priorité est vérifiée). Supposons qu'il y ait une intersection problématique v entre R_i et R_j avec $i < j$. Si v_i et v_j ont la même priorité pour la route R, il y a un nombre impair d'intersections strictement entre les deux. Si les deux routes ont la même priorité en v, il y a la même parité d'intersection strictement entre v_i et v, et de même strictement entre v_j et v. En particulier si on regarde le triangle formé par v_i, v_j, v les différentes droites coupent soit zéro fois, soit deux fois le triangle : il doit y avoir en tout un nombre pair d'intersections sur ce triangle (on ne compte pas les intersections en v, v_i, v_j). Or en tout il y a un nombre impair d'intersections contradiction.



Le cas où v_i et v_j ont une priorité différente se traite de même : il y a un nombre pair de croisements strictement entre v_i et v_j, et comme v a la même priorité pour R_i et R_j, sur une route v a la même priorité que v_i donc il y a un nombre impair d'intersections entre, sur l'autre les priorités sont différentes, donc il y a un nombre pairs de croisements strictement entre : on a la même contradiction de parité.
Bilan les priorités proposées conviennent : le souhait peut bien être réalisé.

Solution n°2
Colorions en blanc ou en noir nos pâtés de maisons (éventuellement infinis) en procédant comme suit. On commence par choisir un pâté de maisons P de manière arbitraire puis, pour chaque pâté de maisons Q, on note $r(Q)$ le nombre de rues qui passent entre P et Q. On décide alors de colorier en blanc tous les pâtés de maisons Q tels que $r(Q) \equiv 0 \pmod 2$, et de colorier en noir tous les autres pâtés de maisons.
On remarque maintenant que, si Q et R sont deux pâtés de maisons adjacents, alors $r(Q) = r(R) \pm 1$. En effet, soit x la rue qui sépare Q et R. Toute autre rue que x, si elle passe entre P et Q, passe aussi entre P et R, et réciproquement. En revanche, la rue x elle-même, sépare P de l'un des deux pâtés de maisons Q ou R, mais pas de l'autre. Ceci démontre bien que $r(Q) = r(R) \pm 1$, et donc que Q et R sont de couleurs différentes.
Pour réaliser son souhait, le conseil municipal peut alors décider qu'un véhicule aura la priorité si, au moment où il atteint l'intersection, se trouve à sa droite un pâté de maison blanc.
On commence par vérifier qu'une telle décision est cohérente. En effet, soit I une intersection entre deux rues. Comme illustré ci-dessous (à gauche), deux des quatre pâtés de maisons adjacents à cette intersection, situés en diagonale l'un de l'autre, sont blancs ; les deux autres sont noirs. Par conséquent, une des deux rues aura bien la priorité sur l'autre à cette intersection.





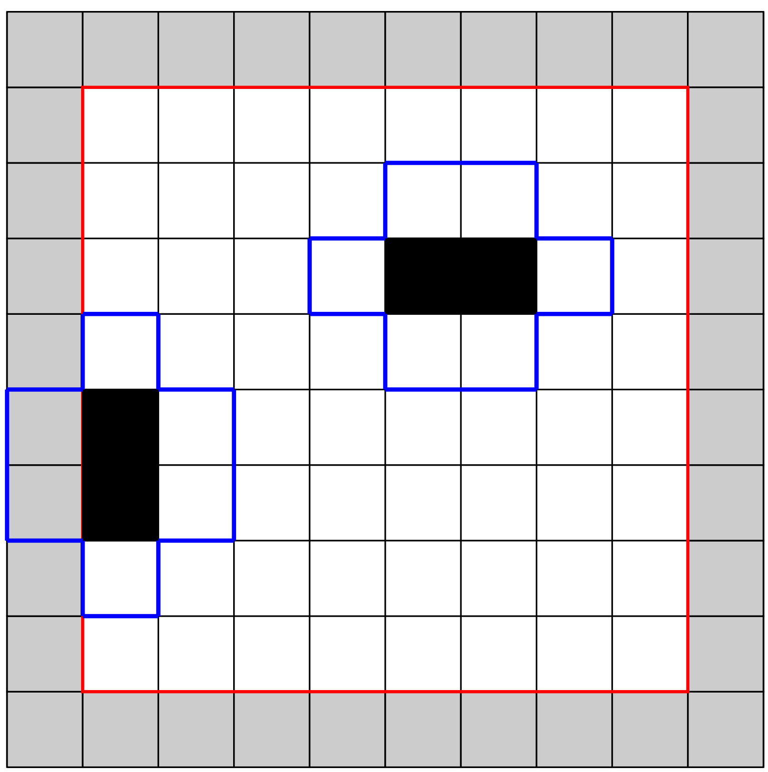
On vérifie ensuite que cette décision réalise bien le souhait du conseil municipal. En effet, soit I et J deux intersections consécutives d'une rue x. Soit y et z les deux rues que croise x à ces intersections. Comme illustré ci-dessus (à droite), si x est prioritaire sur y, elle doit ensuite laisser la priorité à la rue z, ce qui conclut notre démonstration.

Commentaire des correcteurs : Les preuves rendues pour ce problème sont très diverses.

Exercice 9. Soit n un entier strictement positif. Des dominos (de taille 1×2) sont disposés sur un échiquier de taille $2n \times 2n$ de façon à ce que chaque case de l'échiquier soit adjacente à exactement une case couverte par un domino (les diagonales ne comptent pas). Pour tout n, déterminer le nombre maximal de dominos qui peuvent être disposés de cette manière.

Solution de l'exercice 9 Pour ce genre d'exercice, il est ESSENTIEL de commencer par regarder les petits cas afin de conjecturer la solution.
L'exercice nous demande de trouver une valeur maximale c, il faut donc d'une part montrer que pour toute configuration convenable de dominos, il y au plus c dominos, et d'autre part construire une configuration contenant exactement c dominos.
Dans toute la suite, on dire qu'une case est *couverte* si elle est recouverte par un domino ou adjacente à une case recouverte par un domino. On dira de plus qu'un domino *couvre* une case s'il recouvre celle-ci ou si la case est adjacente à une case recouverte par le domino en question.

On commence par chercher une majoration du nombre de dominos.
La première astuce consiste à rajouter de la symétrie pour chaque case. En effet, les arguments éventuels que l'on pourrait donner devraient prendre en compte les casses aux bords, qui ne possèdent pas le même nombre de voisins que les cases aux centre de l'échiquier.
Pour cela, on complète artificiellement l'échiquier en rajoutant une rangée de cases sur les bords, de façon à obtenir un échiquier $(2n+2) \times (2n+2)$.

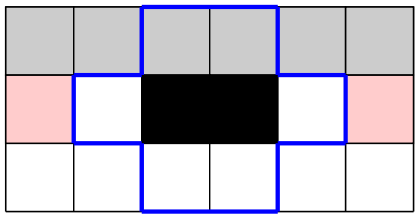
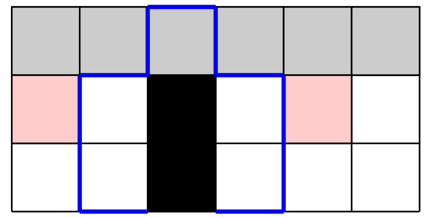


Avec cet ajout, puisque les dominos sont tous compris dans l'échiquier centrale $2n \times 2n$, chaque domino couvre exactement 8 cases du grand échiquier $(2n+2) \times (2n+2)$ et chaque case de l'échiquier $2n \times 2n$ est recouverte par exactement un domino par hypothèse.
Ces observations semblent être un bon point de départ pour un double comptage.

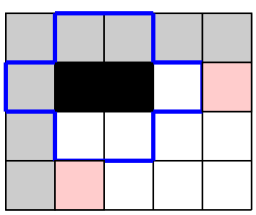
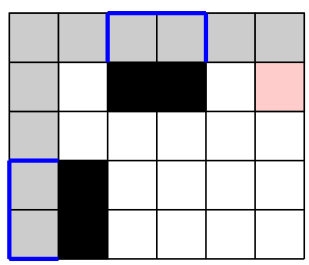
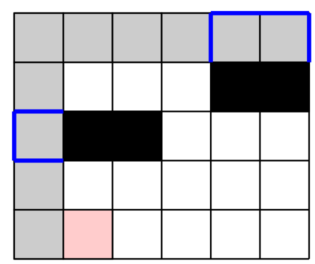
En effet, si b est le nombre de cases grises (donc des cases artificielles) couvertes par un domino, et M le nombre de dominos de notre configuration, alors on a

$$\underbrace{8M}_{\text{nombre de cases couvertes}} = \underbrace{4n^2}_{\text{nombre de cases couvertes dans l'échiquier } 2n\times 2n} + \underbrace{b}_{\text{nombre de cases grises couvertes}}$$

Les dessins et cas particuliers nous suggèrent qu'au plus la moitié des cases grises seront couvertes. Montrons-le.

Si deux cases grises adjacentes dont aucune n'appartient à un coin sont couvertes, alors on est dans le cas du schéma de gauche. Puisque les cases rouges ne peuvent être recouvertes par un domino, parmi les 6 cases grises, seules les deux cases entourées en bleu sont couvertes.
Si une case qui n'est pas un coin est couverte, on est dans le cas du schéma de droite. A nouveau, les deux cases rouges ne pouvant être recouvertes par un domino, seule la case entourée en bleu est couverte parmi les 5 cases grises les plus à gauche du schéma.
On examine à présent les situations possibles pour les coins :

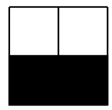




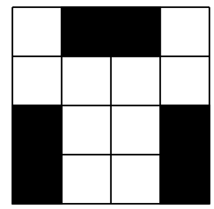
Sur chacun des schémas, les cases rouges ne peuvent être recouvertes par un domino donc les seules cases grises couvertes sont celles entourées en bleu.
Ainsi, on peut associer à chaque case grise couverte une case grise non couverte parmi ses cases voisines, et de façon injective, puisqu'une case grise non couverte admet au plus une case grise voisine couverte.
Ceci termine la preuve que parmi les cases grises, au plus la moitié peut être couverte. On a donc $b \leqslant \dfrac{8n+4}{2} = 4n+2$.
Il vient

$$M \leqslant \left\lfloor \frac{4n^2+4n+2}{8} \right\rfloor = \frac{n(n+1)}{2}$$

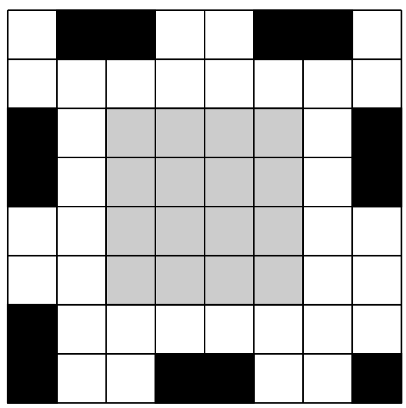
qui nous donne la majoration voulue.

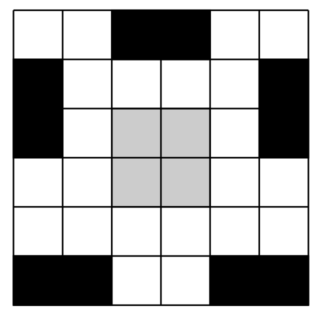
On montre à présent que ce maximum peut être atteint en donnant une construction. Pour déterminer cette construction, il faut une fois de plus faire un examen des petits cas. Cet examen nous pousse à donner une construction par récurrence sur deux crans en distinguant selon les cas où n est pair ou impair.
Pour $n = 2$ et $n = 4$, on a les configurations suivantes :





Pour l'hérédité, on s'inspire des constructions suivantes :





On remarque que les bords noirs du carré central coïncident avec les cases blanches du cadre qui ne sont pas couvertes par des dominos du cadre. De cette façon, on rajoute $n+2$ dominos verticaux et $n+1$ dominos horizontaux. On a donc un total de

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) + (n+2) = \frac{(n+3)(n+2)}{2}$$

dominos, ce qui achève la récurrence et conclut l'exercice.
Solution n°2 :
Regardons une configuration de k dominos qui vérifie l'énoncé. On note a le nombre de domino qui ne touchent pas le bord de la grille, b le nombre de dominos qui n'ont qu'une case sur le bord, c le nombre de dominos qui ont deux cases sur le bord mais aucun dans les coins, d le nombre de domino dont une des extrémités est dans un coin.
On définit la zone d'influence d'un domino comme le nombre de cases de l'échiquier soit adjacente à exactement une case couverte par ce domino. Les dominos qui ne touchent pas le bord de la grille ont une zone d'influence de 8 cases, ceux qui n'ont qu'une case sur le bord ont une zone d'influence de 7 cases, ceux qui ont deux cases sur le bord mais aucun dans les coins ont une zone d'influence de 6 cases et celles dont une des extrémités est dans un coin ont une zone d'influence de taille 5, on a donc :

$$(2n)^2 = 8a + 7b + 6c + 5d = 8(a+b+c+d) - b - 2c - 3d$$

Regardons maintenant le bord de la grille : il y a $8n-4$ cases. Or les dominos comptés par b ont trois cases du bord dans leur zone d'influence, ceux de c en ont 4 comme ceux de d. Ceux de a ont potentiellement entre 0 et 2 cases du bord dans leur zone d'influence. On a donc :

$$8n-4 \geqslant 3b+4c+4d$$

En particulier,

$$(2n)^2 = 8k-b-2c-3d \geqslant 8k-\frac{3b+4d+4d}{2}-d \geqslant 8k-4n+2-4 = 8k-4n-2$$

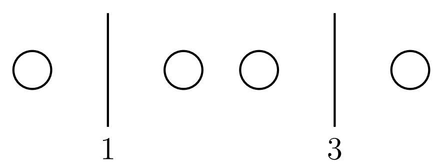
On a donc $k \leqslant \frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{4}$, donc comme k est entier, $k \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$.

Commentaire des correcteurs : Sur cet exercice très difficile, pas mal d'élèves ont justifié qu'il fallait mettre un maximum de domino dans le coin et sur les côtés pour minimiser le nombre de cases qui sont voisines de tels dominos. Bien que cette idée est intelligente pour trouver une configuration optimale, elle ne permet pas de montrer qu'on ne peut pas mieux faire : en effet on pourrait envisager que dans une autre configuration, on ait beaucoup de dominos qui ont plus de cases voisines que ceux de la première construction, mais moins que ceux placés au centre qui couvrent 8 cases. Pour formaliser cela, n'hésitez pas à lire la solution ajoutée au corrigé.

Exercices Seniors

Exercice 10. Un hôpital vient de recevoir une cargaison de vaccins devant être conservés à température très basse dans des frigos spéciaux. Ils ont reçus 300 flacons. Sachant que chacun des 5 frigos spéciaux de l'hôpital peut contenir plus de 300 flacons (la campagne vaccinale vient à peine de commencer !) et que tous les flacons sont identiques et interchangeables, de combien de façons peut-on répartir les flacons dans les frigos ?

Solution de l'exercice 10 Puisque les flacons sont interchangeables, le problème revient à dénombrer le nombre de $5-$uplets $(a_1, \ldots, a_5)$ d'entiers positifs dont la somme vaut 300 (le nombre a_i correspondant au nombre de flacons dans le frigo numéro i).
Choisir un $5-$uplet $(a_1, \ldots, a_5)$ revient à choisir les valeurs des sommes a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3$, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. On vérifie en effet que le choix de ces sommes détermine la valeur de chacun des entiers, en notant que $a_5 = 300 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$.
Si on pose $b_i = \sum_{k=1}^{i} a_k$, on doit donc calculer le nombre de façons de choisir un $4-$uplet (b_1, b_2, b_3, b_4) d'entiers vérifiant $0 \leqslant b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3 \leqslant b_4 \leqslant 300$.
Pour dénombrer cela, considérons une suite de 304 points alignés. On choisit alors 4 pour les remplacer par des traits. On associe alors à chaque trait le nombre de points situés à sa gauche. On vérifie que la suite de nombres obtenus est bien une suite croissante de longueur 4 à valeurs dans $\{0, \ldots, 300\}$.

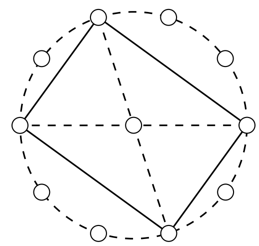


Choisir une suite croissante de 4 entiers de $\{0, \ldots, 300\}$ revient à choisir 4 points parmi les 305 pour les remplacer par des traits, sans se soucier de l'ordre. Il y a donc au total $\binom{304}{4}$ façons de procéder.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est bien résolu.

Exercice 11. On colorie les sommets d'un $100-$gone régulier avec 10 couleurs. Montrer qu'il y a 4 sommets qui forment un rectangle et qui sont coloriés avec au plus 2 couleurs.

Solution de l'exercice 11 Le résultat demandé est un résultat d'existence, on peut donc essayer d'appliquer le principe des tiroirs à des objets bien choisis. Un rectangle est caractérisé par le fait que ses diagonales passent par le centre du cercle dans lequel il est inscrit. Il suffit donc de se concentrer sur ces diagonales.



Il y a 50 diagonales distinctes passant par le centre du $100-$gone. Dans la suite, on les appelle des *diamètres*. Etant donnés deux diamètres, les sommets aux extrémités forment un rectangle à deux couleurs, soit parce que dans chaque diamètre les deux extrémités sont de même couleur (le diamètre est alors *monochrome*), soit parce que les deux couleurs coloriant les deux extrémités de chaque diamètres sont les mêmes.

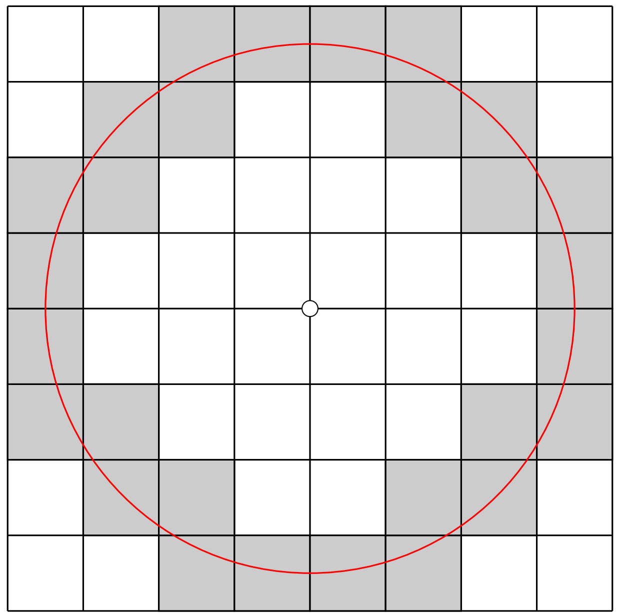
Si on a deux diamètres monochromes parmi les 50 diagonales, on obtient 4 sommets formant un rectangle dont les sommets sont d'au plus deux couleurs.

On suppose désormais qu'on a au plus un diamètre monochrome. Il y a $\frac{10\cdot 9}{2} = 45$ façons de choisir 2 couleurs distinctes parmi les 10 données (10 choix pour la première, 9 choix pour la deuxième et l'ordre du choix des couleurs n'importe pas). Il y a au moins 49 diamètres joignant deux sommets de couleurs distinctes. D'après le principe des tiroirs, on a deux diamètres dont les sommets sont deux à deux de même couleur. Les quatre sommets forment donc un rectangle vérifiant la propriété de l'énoncé.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est très bien résolu ! Une erreur récurrente est de déclarer qu'il y a 45 façons de colorier les couples de sommets, en oubliant que certains couples pourraient être monochromatiques. Cela fait alors 55 coloriages possibles et le principe des tiroirs n'est alors plus applicable directement.

Exercice 12. Un cercle de diamètre $2n - 1$ est tracé au centre d'un échiquier $2n \times 2n$. Combien de cases sont traversées par un arc de cercle ?

<u>*Solution de l'exercice 12*</u>



Soit $r = n - \frac{1}{2}$ le rayon du cercle. L'échiquier est traversé par $2n - 1$ segments horizontaux et $2n - 1$ segments verticaux, allant de bord en bord. Le cercle croise deux fois chacun de ces segments.
Comme r^2 n'est pas entier, le théorème de Pythagore nous permet d'affirmer que le cercle ne peut pas passer par le coin d'une case.
Ainsi, pour chaque case traversée par le cercle, on a exactement deux points d'intersection avec le grillage de l'échiquier. De plus, chaque point d'intersection du cercle avec la grille est sur le bord d'exactement deux cases.
Par conséquent, le nombre de cellules traversées par le cercle correspond au nombre de de points d'intersections entre le cercle et le grillage, soit $8n - 4$.
On remarque que c'est aussi le nombre de cases au bord de l'échiquier.

<u>*Commentaire des correcteurs :*</u> L'exercice est très bien réussi !

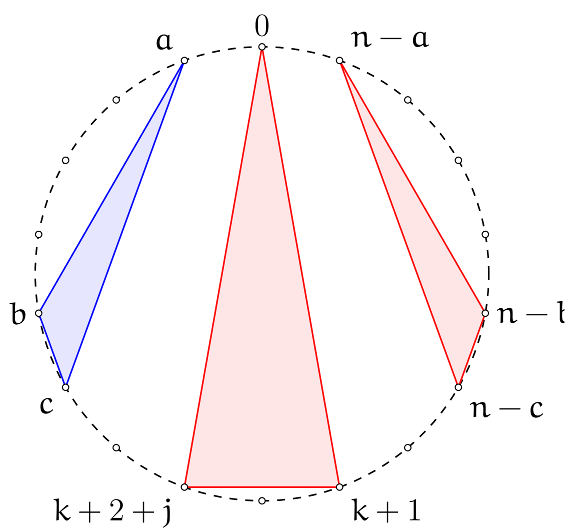
Exercice 13. Soit $n \geqslant 3$ un entier. On place n points sur un cercle. Chacun à leur tour, Noémie et Paul doivent tracer un triangle dont les sommets sont parmi les points qui ne sont pas les sommets d'un triangle déjà tracé et dont les côtés ne coupent pas les côtés des triangles déjà tracés. Le premier joueur à ne plus pouvoir jouer a perdu. Si Noémie commence, lequel des deux joueurs dispose d'une stratégie gagnante ?

Solution de l'exercice 13 En examinant l'énoncé pour des petites valeurs de n, on se rend compte que Noémie dispose d'une stratégie gagnante. On essaye donc de montrer que c'est toujours le cas.

Notons que, quitte à déplacer les points le long du cercle, on peut supposer que le $n-$gone est régulier. On numérote alors les sommets de 0 à $n-1$ dans le sens trigonométrique.

L'idée est d'employer une stratégie dite "miroir", c'est-à-dire une stratégie dans laquelle Noémie est en position d'effectuer le même mouvement que son adversaire, de sorte que tant que Paul peut jouer, Noémie le peut aussi et donc Paul sera le premier à ne plus pouvoir effectuer de mouvement.

Pour cela, Noémie va essayer, lors de son premier tour, de séparer le $n-$gone en deux parties symétriques par rapport à un axe. Dans ce but, on écrit $n-3=2k+j$, avec $j=0$ ou 1. Noémie trace alors le triangle ABC dont les sommets ont pour numéro $0, 1+k$ et $2+k+j$. Le petit arc AB contient donc k sommets, le petit arc BC en contient j et le petit arc CA en contient k. Dans la suite du jeu, un triangle tracé a ses trois sommets qui appartiennent au même arc. Puisque l'arc BC contient au plus un sommet, on ne peut pas tracer de triangle avec l'éventuel sommet de cet arc.



Dans la suite, si Paul trace un triangle en employant les sommets a, b, c, et disons que ces sommets appartiennent à l'arc AB, alors Noémie trace un triangle symétrique avec les sommets $n-a, n-b$ et $n-c$ dans l'arc BC.
En appliquant cette stratégie, on obtient de proche en proche que tant que Paul peut tracer un triangle valide, Noémie le peut également, ce qui lui donne la stratégie gagnante voulue.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est bien réussi ! Les élèves ont pour la plupart compris la stratégie gagnante à adopter. Il faut cependant veiller à etre clair dans son explication de la stratégie en miroir. Des dessins, trop rares, auraient été le bienvenu ici.

Exercice 14. On considère $2n$ entiers strictement positifs. Un *couplage* est une répartition de ces entiers en n paires d'entiers deux à deux disjointes. Par exemple, $\{(1,3),(5,7)\}$ est un couplage des entiers $1,3,5,7$. En revanche, $\{(1,3),(3,7)\}$ n'est pas un couplage des entiers $1,3,5,7$. Un couplage est dit *sans carré* si le produit des deux nombres dans chaque paire n'est jamais un carré parfait. Montrer que s'il existe un couplage sans carré, il en existe au moins $n!$.

<u>*Solution de l'exercice 14*</u>

On commence par examiner l'énoncé pour des petites valeurs de n.
Si $n = 1$, $n! = 1$ et l'énoncé est trivial.

On suppose ici que $n = 2$. On note a, b, c et d les quatre entiers et on suppose sans perte de généralité que $\{(a,b),(c,d)\}$ est un couplage sans carré. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins l'un des quatre entiers. Si cet ensemble est vide, cela signifie que $a = b = c = d = 1$ et donc tout couplage est parfait. On peut donc désormais supposer que $\mathcal{P}$ est non vide. Le fait que ab ne soit pas carré signifie que l'on dispose d'un nombre premier p de $\mathcal{P}$ tel que $v_p(a) + v_p(b)$ est impair et donc que $v_p(a)$ et $v_p(b)$ n'ont pas la même parité. On peut par exemple supposer que $v_p(a)$ est pair et $v_p(b)$ impair.

— Si $v_p(c)$ et $v_p(d)$ ne sont pas de la même parité, par exemple $v_p(c)$ est pair alors que $v_p(d)$ est impair, alors le couplage $\{(a,d);(b,c)\}$ est sans carré car $v_p(a) + v_p(d)$ et $v_p(b) + v_p(c)$ sont impairs.

— On suppose désormais que $v_p(c)$ et $v_p(d)$ sont de même parité, disons pairs. On dipose d'un nombre premier $q \in \mathcal{P}$ tel que $v_q(c) + v_q(d)$ est impair, et on peut supposer que $v_q(c)$ est impair et $v_q(d)$ est pair. Si $v_q(a) + v_q(b)$ est impaire, alors on peut conclure de la même façon que précédemment. Sinon, $v_q(a)$ et $v_q(b)$ sont de même parité. S'ils sont tous les deux pairs, alors $\{(a,c);(b,d)\}$ est sans carré car $v_q(a) + v_q(c)$ est impair et $v_p(b) + v_p(d)$ est impair. S'ils sont tous les deux impairs, alors de même $\{(a,d);(b,c)\}$ est sans carré.

On a exhibé $2!$ couplages dans tous les cas, ce qui montre l'énoncé dans le cas où $n = 2$.

On comprend que l'on doit jouer avec la parité des valuations $p-$adiques des entiers considérés. Essayons d'utiliser ce que nous venons de faire pour traiter l'exercice par récurrence.

On suppose que l'énoncé est vrai pour tout $2(n-1)-$uplet d'entiers strictement positifs, avec $n-1 \geqslant 2$. On considère $2n$ entiers strictement positifs tel qu'on peut former au moins un couplage sans carré à partir de ces $2n$ entiers. On note $\{(a_1,a_2);(a_3,a_4);\ldots;(a_{2n-1},a_{2n})\}$ ce couplage.
On fixe $1 \leqslant i \leqslant (n-1)$ un entier et on considère les paires (a_1,a_2) et (a_{2i+1},a_{2i+2}). D'après le cas $n = 2$, on dispose d'un autre couplage parfait de ces deux paires, noté $\{(a_1,a_j);(a_2,a_k)\}$ avec $\{j,k\} = \{2i+1, 2i+2\}$. On dispose donc d'un couplage parfait des $2(n-1)$ entiers a_ℓ, avec $\ell \neq 1, j$. Par hypothèse de récurrence, on a donc au moins $(n-1)!$ couplages sans carré distincts avec ces nombres. On obtient donc $(n-1)!$ couplages sans carré des $2n$ entiers, composés de la paire (a_1,a_j) et des $n-1$ paires obtenues avec un couplage sans carré des $2(n-1)$ entiers précédents. On appelle ces couplages des $i-$couplages.

Etant donné que l'on a $n-1$ choix pour l'entier i et que si $i \neq j$, un $i-$couplage est distinct d'un $j-$couplage (puisque dans un $i-$couplage a_1 est couplé avec un entier de la paire (a_{2i+1},a_{2i+2}) et dans un $j-$couplage, a_1 est couplé avec un entier de la paire (a_{2j+1},a_{2j+2})), on obtient $(n-1)\cdot(n-1)!$ couplages sans carré distincts.

Enfin, on dispose, toujours par hypothèse de récurrence, d'au moins $(n-1)!$ couplages sans carré des entiers $a_3,\ldots,a_{2n}$, distincts des couplages générés précédemment. On a donc en tout $(n-1)\cdot(n-1)! + (n-1)! = n!$ couplages distincts, ce qui achève la récurrence et conclut l'exercice.

<u>*Commentaire des correcteurs :*</u> Le problème est bien compris mais quelques élèves sont trop rapides sur l'argument de comptage final et manquent de précision.

Exercice 15. Soit k un entier naturel non nul. Soit G un graphe orienté non vide tel qu'aucun sommet n'est relié à lui-même et si u et v sont deux sommets distincts, on ne peut avoir à la fois une arête allant de u vers v et une arête allant de v vers u. Supposons que pour tout k-uplets de sommets $(x_1, \ldots, x_k)$ de G, on puisse trouver un sommet u de G tels que pour tout $i = 1, ..., k$, il existe une arête allant de u vers x_i dans G. Montrer que $|G| \geqslant 2^{k+1} - 1$.

Solution de l'exercice 15 En examinant l'énoncé pour des graphes particulier, il semble pertinent d'essayer de faire une récurrence sur l'entier k.
Si $k = 1$, il s'agit de montrer que $|G| \geqslant 3$. Puisque G est non vide, on dispose d'un sommet $x \in G$. En appliquant l'hypothèse au sommet x, il existe un sommet u de G distinct de x et une arête allant de u vers x. En appliquant l'hypothèse au sommet u, il existe un sommet v de G distinct de u et une arête allant de v vers u. Puisqu'il ne peut y avoir en même temps une arête allant de u vers x et une arête allant de x vers u, v est bien distinct de x et u et $|G| \geqslant 3$.

On suppose désormais que pour tout graphe G vérifiant la propriété de l'énoncé pour un entier $k-1 \geqslant 1$ fixé, on a $|G| \geqslant 2^k - 1$. On fixe alors un graphe G non vide vérifiant la propriété pour l'entier k et on désire montrer que $|G| \geqslant 2^{k+1} - 1$.
Notons que le graphe G vérifie alors automatiquement la propriété pour l'entier $k - 1$.
On fixe alors un sommet u de G et on note G_u le sous-graphe de G constitué de l'ensemble des sommets x de G tels qu'il existe une arête allant de x vers u. Etant donné un $k-1$-uplets y_1, ...,y_{k-1} de G_u et en appliquant l'hypothèse au k-uplets y_1, ...,y_{k-1}, u, on sait qu'il existe un sommet v tel que pour tout $i = 1, ..., k-1$, il y a une arête de v à y_i, et il y a une arête de v à u. Le sommet v appartient donc à G_u. Cela signifie que le graphe G_u vérifie la propriété de l'énoncé pour $k - 1$. D'après l'hypothèse de récurrence, $|G_u| \geqslant 2^k - 1$.

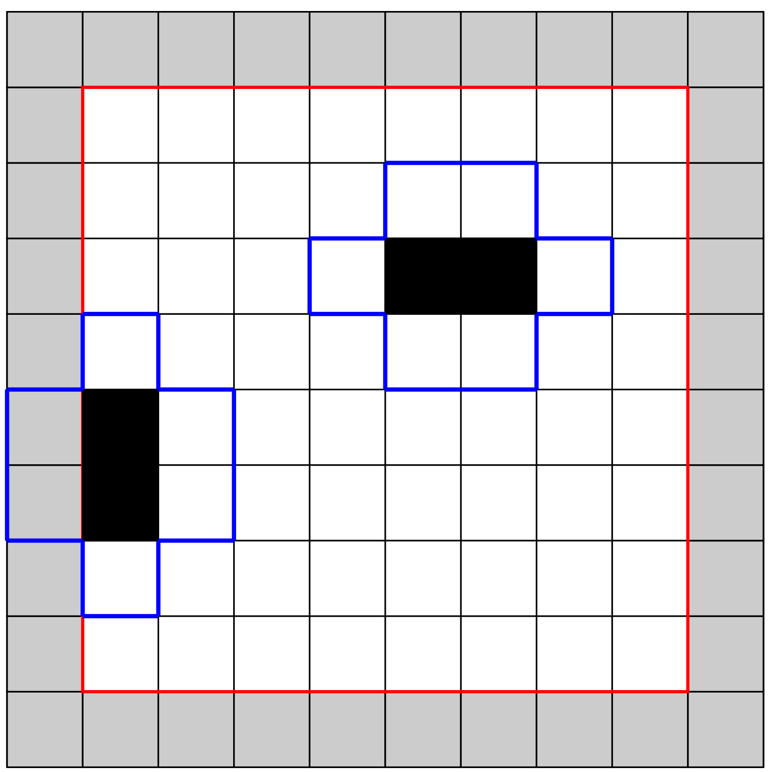
Pour conclure, il reste à trouver un sommet u vérifiant que $\frac{|G|-1}{2} \geqslant |G_u|$, car on aurait alors $|G| \geqslant 2^{k+1} - 1$.
Un tel sommet u vérifie en particulier qu'il y a moins de $\frac{|G|-1}{2}$ arêtes allant de vers. Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas et que pour tout sommet il y a au moins $\frac{|G|+1}{2}$ arêtes allant vers ce sommet. Alors on compte au moins $\frac{|G|\cdot(|G|+1)}{2}$ arêtes dans le graphe. Or, entre deux sommets il existe au plus une arêtes et il y a $\frac{|G|\cdot(|G|-1)}{2}$ paires de sommets distincts, donc au plus $\frac{|G|\cdot(|G|-1)}{2}$ arêtes dans le graphe, ce qui donne la contradiction recherchée et achève la récurrence.

Commentaire des correcteurs : Le problème a été abordé par très peu d'élèves et n'a été résolu que par un seul élève. Toutefois, nous saluons l'effort des élèves qui ont rendu les traces de leur recherche, même non abouties.

Exercice 16. Soit n un entier strictement positif. Des dominos (de taille 1×2) sont disposés sur un échiquier de taille $2n \times 2n$ de façon à ce que chaque case de l'échiquier soit adjacente à exactement une case couverte par un domino (les diagonales ne comptent pas). Pour tout n, déterminer le nombre maximal de dominos qui peuvent être disposés de cette manière.

Solution de l'exercice 16 Pour ce genre d'exercice, il est ESSENTIEL de commencer par regarder les petits cas afin de conjecturer la solution.
L'exercice nous demande de trouver une valeur maximale c, il faut donc d'une part montrer que pour toute configuration convenable de dominos, il y au plus c dominos, et d'autre part construire une configuration contenant exactement c dominos.
Dans toute la suite, on dire qu'une case est *couverte* si elle est recouverte par un domino ou adjacente à une case recouverte par un domino. On dira de plus qu'un domino *couvre* une case s'il recouvre celle-ci ou si la case est adjacente à une case recouverte par le domino en question.

On commence par chercher une majoration du nombre de dominos.
La première astuce consiste à rajouter de la symétrie pour chaque case. En effet, les arguments éventuels que l'on pourrait donner devraient prendre en compte les casses aux bords, qui ne possèdent pas le même nombre de voisins que les cases aux centre de l'échiquier.
Pour cela, on complète artificiellement l'échiquier en rajoutant une rangée de cases sur les bords, de façon à obtenir un échiquier $(2n+2) \times (2n+2)$.

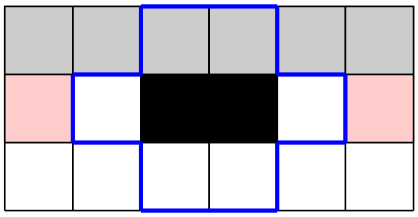


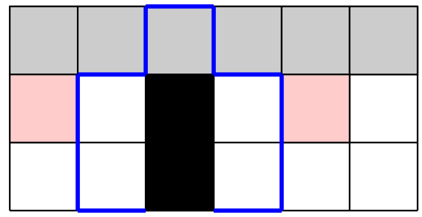
Avec cet ajout, puisque les dominos sont tous compris dans l'échiquier centrale $2n \times 2n$, chaque domino couvre exactement 8 cases du grand échiquier $(2n+2) \times (2n+2)$ et chaque case de l'échiquier $2n \times 2n$ est recouverte par exactement un domino par hypothèse.
Ces observations semblent être un bon point de départ pour un double comptage.

En effet, si b est le nombre de cases grises (donc des cases artificielles) couvertes par un domino, et M le nombre de dominos de notre configuration, alors on a

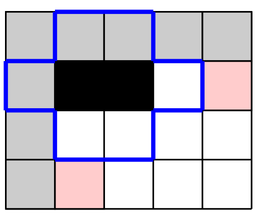
$$\underbrace{8M}_{\text{nombre de cases couvertes}} = \underbrace{4n^2}_{\text{nombre de cases couvertes dans l'échiquier } 2n\times 2n} + \underbrace{b}_{\text{nombre de cases grises couvertes}}$$

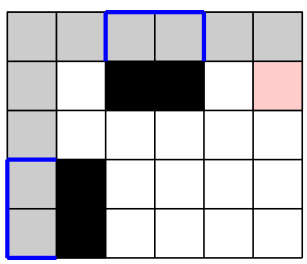
Les dessins et cas particuliers nous suggèrent qu'au plus la moitié des cases grises seront couvertes. Montrons-le.

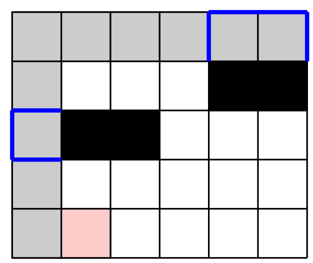




Si deux cases grises adjacentes dont aucune n'appartient à un coin sont couvertes, alors on est dans le cas du schéma de gauche. Puisque les cases rouges ne peuvent être recouvertes par un domino, parmi les 6 cases grises, seules les deux cases entourées en bleu sont couvertes.
Si une case qui n'est pas un coin est couverte, on est dans le cas du schéma de droite. A nouveau, les deux cases rouges ne pouvant être recouvertes par un domino, seule la case entourée en bleu est couverte parmi les 5 cases grises les plus à gauche du schéma.
On examine à présent les situations possibles pour les coins :





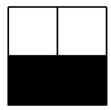


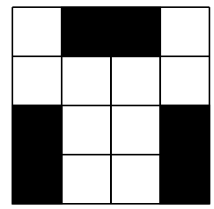
Sur chacun des schémas, les cases rouges ne peuvent être recouvertes par un domino donc les seules cases grises couvertes sont celles entourées en bleu.
Ainsi, on peut associer à chaque case grise couverte une case grise non couverte parmi ses cases voisines, et de façon injective, puisqu'une case grise non couverte admet au plus une case grise voisine couverte.
Ceci termine la preuve que parmi les cases grises, au plus la moitié peut être couverte. On a donc $b \leqslant \frac{8n+4}{2} = 4n+2$.
Il vient

$$M \leqslant \left\lfloor \frac{4n^2+4n+2}{8} \right\rfloor = \frac{n(n+1)}{2}$$

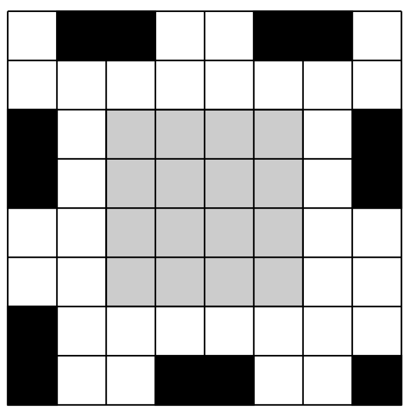
qui nous donne la majoration voulue.

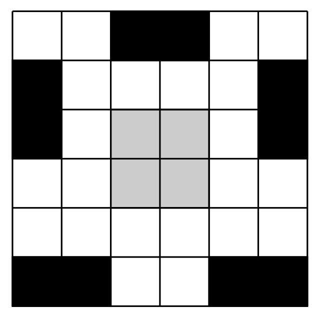
On montre à présent que ce maximum peut être atteint en donnant une construction. Pour déterminer cette construction, il faut une fois de plus faire un examen des petits cas. Cet examen nous pousse à donner une construction par récurrence sur deux crans en distinguant selon les cas où n est pair ou impair.
Pour $n = 2$ et $n = 4$, on a les configurations suivantes :





Pour l'hérédité, on s'inspire des constructions suivantes :





On remarque que les bords noirs du carré central coïncident avec les cases blanches du cadre qui ne sont pas couvertes par des dominos du cadre. De cette façon, on rajoute $n + 2$ dominos verticaux et $n + 1$ dominos horizontaux. On a donc un total de

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) + (n+2) = \frac{(n+3)(n+2)}{2}$$

dominos, ce qui achève la récurrence et conclut l'exercice.

<u>*Solution n°2 :*</u>
Regardons une configuration de k dominos qui vérifie l'énoncé. On note a le nombre de domino qui ne touchent pas le bord de la grille, b le nombre de dominos qui n'ont qu'une case sur le bord, c le nombre de dominos qui ont deux cases sur le bord mais aucun dans les coins, d le nombre de domino dont une des extrémités est dans un coin.
On définit la zone d'influence d'un domino comme le nombre de cases de l'échiquier soit adjacente à exactement une case couverte par ce domino. Les dominos qui ne touchent pas le bord de la grille ont une zone d'influence de 8 cases, ceux qui n'ont qu'une case sur le bord ont une zone d'influence de 7 cases, ceux qui ont deux cases sur le bord mais aucun dans les coins ont une zone d'influence de 6 cases et celles dont une des extrémités est dans un coin ont une zone d'influence de taille 5, on a donc :

$$(2n)^2 = 8a + 7b + 6c + 5d = 8(a + b + c + d) - b - 2c - 3d$$

Regardons maintenant le bord de la grille : il y a $8n-4$ cases. Or les dominos comptés par b ont trois cases du bord dans leur zone d'influence, ceux de c en ont 4 comme ceux de d. Ceux de a ont potentiellement entre 0 et 2 cases du bord dans leur zone d'influence. On a donc :

$$8n - 4 \geqslant 3b + 4c + 4d$$

En particulier,

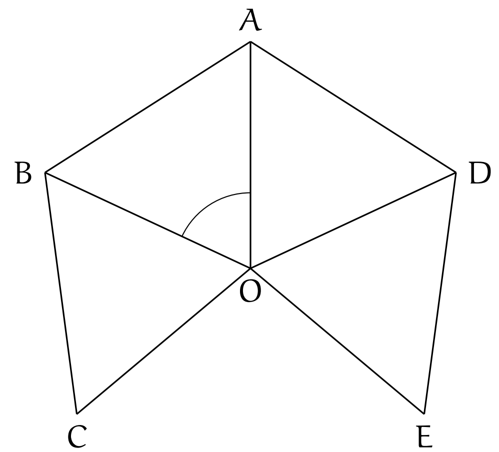
$$(2n)^2 = 8k - b - 2c - 3d \geqslant 8k - \frac{3b + 4d + 4d}{2} - d \geqslant 8k - 4n + 2 - 4 = 8k - 4n - 2$$

On a donc $k \leqslant \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{4}$, donc comme k est entier, $k \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$.

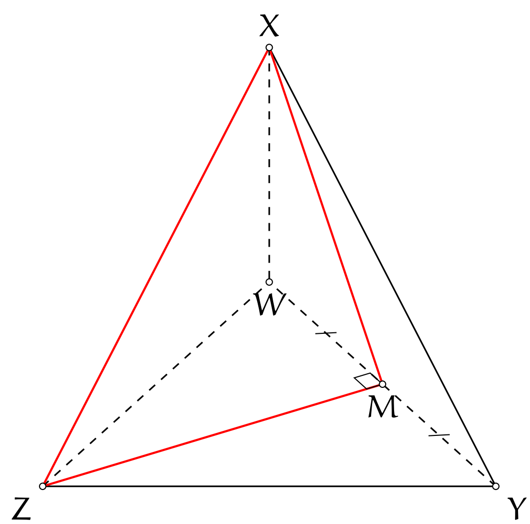
Commentaire des correcteurs : La problème était très difficile et assez délicat à traiter, si bien que très peu des tentatives des élèves se sont avérées correctes. Les élèves ont pour la plupart compris que le problème avait lieu au bord, mais très peu s'ys sont pris de la bonne façon. Optimiser localement la situation (par exemple en l'optimisant aux bords) n'était pas gage d'une optimisation globale, comme bien souvent dans les problèmes de combinatoire. De fait, quelques élèves, en cherchant à montrer que pour la configuration optimale il faut "forcément" se placer dans le cas qu'ils citent, voient se confondre dans leur solution la construction d'une configuration optimale et la preuve que la borne optimale est $\frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 17. Deux tétraèdres réguliers sont dits juxtaposés s'ils ont en commun une face. Peut on remplir l'espace en juxtaposant des tétraèdres réguliers ?

Solution de l'exercice 17 On suppose par l'absurde qu'un tel pavage existe. Dans ce cas, pour tout tétraèdre du pavage, le symétrique de ce tétraèdre par rapport à chacune de ses faces appartient également au pavage. On a donc la situation suivante



Il suffit donc de montrer, étant donné que tous les angles en O sont égaux, que l'angle $\widehat{BOA}$ n'est pas rationnel. En effet, si c'est le cas, on ne peut pas juxtaposer les tétraèdres autour du sommet O sans que deux se surperposent ou qu'il y ait un vide.
On calcule donc l'angle $\widehat{BOA}$, qui est donc l'angle formé par les deux plans portant les faces d'un tétraèdre régulier.
Soit $XYZW$ un tétraèdre régulier de côté 1.



Soit M le milieu du segment $[YW]$. L'angle entre les deux plans portant les faces XYW et ZYW correspond à l'angle $\widehat{ZMY}$. Les segments $[ZM]$ et $[XM]$ sont des hauteurs dans les triangles équilatéraux XYW et WYZ de côté 1. Leur longueur vaut donc $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On utlise alors la formule d'Al-Kashi :

$$\cos\widehat{ZMX} = \frac{XM^2 + MZ^2 - XZ^2}{2XM \cdot MX} = \frac{1}{3}$$

Il faut donc démontrer que $\theta = \arccos\frac{1}{3}$ n'est pas un multiple rationnel de π. On suppose par l'absurde qu'il existe un entier n et un entier k tel que $n\theta = 2k\pi$.
Observons qu'avec les formules de factorisation, on a pout tout m :

$$\cos((m+1)\theta) + \cos((m-1)\theta) = 2\cos\theta\cos(m\theta)$$

si bien qu'en posant $T_1(X) = X$ et $T_{m+1}(X) = 2XT_m(X) - T_{m-1}(X)$ pour tout m, on construit par récurrence une suite de polynômes (T_m) vérifiant $T_m(\cos\theta) = \cos m\theta$ pour tout entier m. On vérifie par récurrence que T_m est à coefficients entiers, de degré m et de coefficient dominant 2^{m-1}. On peut donc écrire $T_n(X) = 2^{n-1}X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$, avec les a_i entiers. En évaluant en $\cos\theta$, on obtient :

$$0 = \cos(n\theta) = T_n(\cos\theta) = T_n\left(\frac{1}{3}\right) = 2^{n-1} \cdot \frac{1}{3^n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot \frac{1}{3^i}$$

ce qui après multiplication par 3^n, nous ramène à l'égalité $2^{n-1} + 3\ell = 0$ avec ℓ entier, ce qui est absurde. θ n'est donc pas un multiple rationnel de π, ce qui conclut l'exercice.

Commentaire des correcteurs : Le problème est bien abordé. Les élèves ont bien compris que l'enjeu est de montrer que $\arccos 1/3$ ne divise pas 2π. Plusieurs élèves vont alors un peu trop vite pour conclure et se contentent d'examiner une valeur approchée, rendant leur raisonnement moins convaincant.

Exercice 18. Soit $a_1, a_2, \dots a_n$ des entiers positifs satisfaisant

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leqslant \frac{1}{2}$$

Chaque année, les organisateurs de l'Olympiade Internationale publient un rapport de qualité basé sur n critères. Pour le critère numéro i, le rapport attribue une note qui est un entier compris entre 1 et a_i. Le rapport est dit *optimiste* si au moins $n-1$ des n critères ont une note strictement supérieure à la note qu'ils avaient l'année précédente. Les organisateurs publieront le premier rapport en 2021. Montrer qu'ils peuvent s'arranger pour publier un rapport optimiste chaque année à partir de 2022.

Solution de l'exercice 18 Tout d'abord, pour chaque i, on dispose d'un entier k_i tel que $2^{k_i} \leqslant a_i < 2^{k_i+1}$ et on observe que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2_i^k} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{a_i} \leqslant 1$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $k_1 \leqslant \dots \leqslant k_n$. Nous allons commencer par choisir une classe de de congruence A_i modulo 2^{k_i} pour chaque i, c'est-à-dire un ensemble de la forme $\{a+k2^{k_i}, k \in \mathbb{Z}\}$, de telle sorte que les ensembles $A_1, \dots A_n$ soient deux à deux disjoints. Pour cela on choisit $A-1$ une classe quelconque modulo 2^{k_1}. On suppose qu'on a choisi correctement $A_1, \dots A_{r-1}$. Pour choisir A_r, on remarque que l'ensemble A_i est l'union disjointe de $2^{k_r-k_i}$ classes de congruence modulo 2^{k_r}. Puisque $\sum_{i=1}^{r-1} 2^{k_r-k_i} < 2^{k_r} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2_i^k}$, on a bien un élément x_r de $\{1, \dots, 2^{k_r}\}$ qui n'appartient à aucun des A_i, donc l'ensemble $A_r = \{x_r + k2^{k_r}, k \in \mathbb{Z}\}$ convient.

On prouve à présent le problème. On ne va en fait utiliser que des notes comprises entre 1 et 2^{k_i} pour le critère i. La première année, on donne à chaque critère la note 1. Puis, la $y-$ème année, pour chaque i, si $y \in A_i$ alors la note du critère i devient 1 et sinon, on augmente la note du critère i de 1. Puisque les A_i sont disjoints, les rapports successifs sont bien optimistes chaque année. De plus, la note du critère i ne peut augmenter de 1 qu'au plus $2^{k_i}-1$ fois consécutives puis redescend à 1. Donc la note du critère i ne dépasse jamais $2^{k_i} \leqslant a_i$, le rapport est donc valide.

Commentaire des correcteurs : Le problème a été abordé par très peu d'élèves et seul un élève a fourni une solution complète.