H l'orthocentre du triangle. Le symétrique de H par rapport à M est E, de telle sorte que $HCEB$ est un parallélogramme. $BD = BH$ et $\widehat{CBD} = \widehat{CBH}$ donc les parallélogrammes $CTBD$ et $HBEC$ sont symétriques par rapport à (OM). Comme H est symétrique de D par rapport à (BC), T est symétrique de E par rapport à (BC). Donc (ET) et (BC) sont perpendicualires. Soit X' l'intersection de Γ avec (AM). On a $\widehat{CX'M} = \widehat{CBA} = \widehat{CQM}$ et de même $\widehat{MX'B} = \widehat{MQB}$ donc X' est symétrique de Q par rapport à X', donc (QX') et (BC) sont parallèles. Donc $[QT]$ et $[EX']$ sont symétriques par rapport à (BC), donc $ETQX'$ est trapèze isocèle et X' appartient au cerlce Γ et au cercle circonscrit au triangle ETQ, donc $X = X'$ et X est sur (AM).

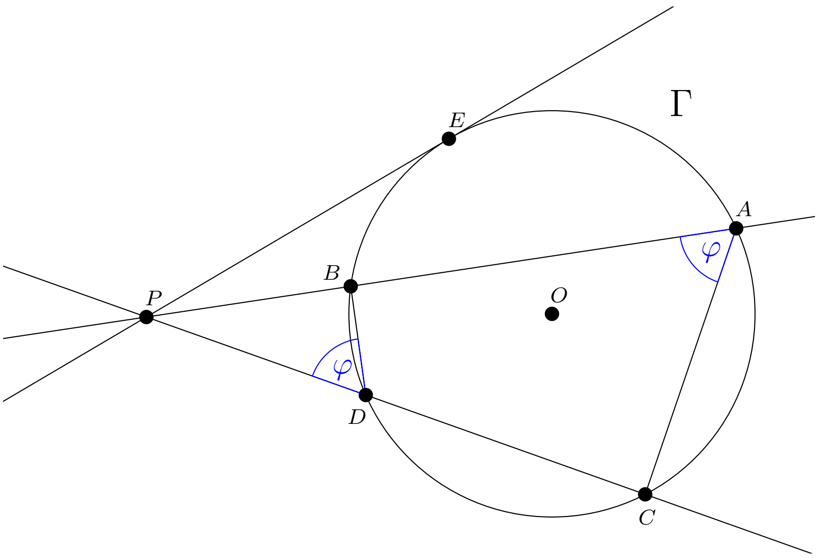
3 Puissance d'un point et axes radicaux

L'objet de ce cours est d'introduire deux notions fondamentales en géométrie du cercle : celle de puissance d'un point par rapport à un cercle, et à partir d'elle celle d'axe radical. Nous nous proposons d'en étudier les principales propriétés, et d'appliquer ces savoirs fraîchement acquis à travers des exercices brassant l'ensemble des acquis de la période.

En classe, seuls les exercices 4 et 9 n'ont pas été abordés, le dernier ayant été proposé à chercher aux élèves les plus rapides.

– Puissance d'un point –

Soient un cercle Γ de centre O et de rayon r et un point P. On considère trois droites passant par P et coupant le cercle Γ : la première le coupe en A et B, la deuxième en C et D, et la troisième est une tangente au cercle, qu'elle ne coupe donc qu'en un point, E.



Théorème 4.3.1 (Puissance d'un point par rapport à un cercle)**.**
On a alors : $PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE^2 = PO^2 - r^2$.

Démonstration. Par chasse aux angles, on marque les angles φ et on constate que les triangles PAC et PDB sont semblables. Ainsi, $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$, d'où le résultat. Cet argument vaut aussi pour le cas de la tangente. Enfin, lorsqu'on considère la droite PO, on a toujours la même égalité pour $(PO-r)(PO+r)$, ce qui conclut. □

Ainsi, la quantité $PA \cdot PB$ ne dépend pas de la droite passant par P avec laquelle on intersecte Γ. On appelle ce produit la *puissance* du point P par rapport au cercle Γ, notée $\mathcal{P}_\Gamma(P)$.

Remarque 4.3.2.
L'usage veut qu'on travaille avec des mesures algébriques, en accord avec le signe de l'expression $PO^2 - r^2$. Ainsi, la puissance de P par rapport à Γ est positive si P est à l'extérieur du cercle, nulle si P est dessus et négative si P est à l'intérieur.

Remarque 4.3.3.
Le théorème 4.3.1 admet une réciproque fort utile : soient deux droites (AB) et (CD) s'intersectant en P, si $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ (en mesures algébriques) alors A,B,C,D sont cocyliques. La puissance d'un point par rapport à un cercle fournit donc une caractérisation pour la cocyclicité de 4 points.

Exercice 1
Dans un triangle ABC, la hauteur issue de C coupe le cercle de diamètre $[AB]$ en M et N. La hauteur issue de B coupe le cercle de diamètre $[AC]$ en P et Q. Montrer que les points M,N,P,Q sont cocyliques.

Exercice 2
Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit et S le pôle Sud de A. On note D le point d'intersection de (AS) avec (BC). Une droite passant par S recoupe (BC) en E et Γ en F. Montrer que $SA \cdot SD = SE \cdot SF$.

Exercice 3
Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle Γ. La parallèle à (BC) passant par D coupe (AC) en P, (AB) en Q et recoupe Γ en R. La parallèle à (AB) passant par D coupe (AC) en S, (BC) en T et recoupe Γ en U. Montrer que $\frac{PQ}{QR} = \frac{TU}{ST}$.

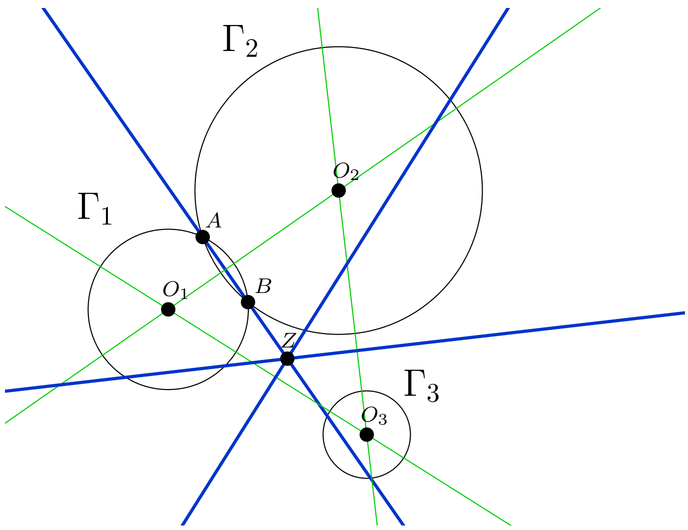
Exercice 4
Soit $ABCD$ un parallélogramme, H l'orthocentre du triangle ABC. La parallèle à (AB) passant par H coupe (BC) en P et (AD) en Q. La parallèle à (BC) passant par H coupe (AB) en R et (CD) en S. Montrer que P,Q,R,S sont cocycliques.

– Axes radicaux –

On considère deux cercles Γ_1, de centre O_1, et Γ_2, de centre O_2. Quel est alors le lieu des points ayant la même puissance par rapport à Γ_1 et Γ_2 ? À l'aide de l'expression $PO^2 - r^2$ et du théorème de Pythagore, on montre qu'il s'agit d'une droite perpendiculaire à O_1O_2, appelée *axe radical* des cercles Γ_1 et Γ_2.

Remarque 4.3.4.
Si les cercles Γ_1 et Γ_2 s'intersectent en deux points A et B, alors leur axe radical est la droite (AB), dont on a vu en TD qu'elle était perpendiculaire à la droite des centres. On a aussi le cas limite : si Γ_1 et Γ_2 sont tangents entre eux, alors leur axe radical et leur tangente commune.

Théorème 4.3.5 (Axes radicaux)**.**
Soient Γ_1, Γ_2 et Γ_3 trois cercles. Alors les trois axes radicaux obtenus deux à deux sont soit concourants, soit parallèles (éventuellement confondus). De plus, les axes radicaux sont parallèles si et seulement si les centres des trois cercles sont alignés.



En vert, les droites reliant les centres. En bleu, les trois axes radicaux concourants.

Démonstration. Supposons que les axes radicaux de Γ_1 avec Γ_2 et de Γ_2 avec Γ_3 ne sont pas parallèles. Soit alors P leur point d'intersection. On a $\mathcal{P}_{\Gamma_1}(P) = \mathcal{P}_{\Gamma_2}(P)$ et $\mathcal{P}_{\Gamma_2}(P) = \mathcal{P}_{\Gamma_3}(P)$, d'où $\mathcal{P}_{\Gamma_3}(P) = \mathcal{P}_{\Gamma_1}(P)$. Donc P est, par définition sur le troisième axe radical.

Supposons maintenant que les axes radicaux de Γ_1 avec Γ_2 et de Γ_2 avec Γ_3 sont parallèles. On a alors $(O_1O_2) \mathbin{/\!/} (O_2O_3)$ (deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles), d'où les points O_1, O_2, O_3 alignés. Dès lors, l'axe radical de Γ_3 avec Γ_1 est aussi perpendiculaire à la droite des trois centres, donc parallèle aux deux autres. Réciproquement, l'alignement des centres O_1, O_2, O_3 implique que les axes radicaux sont parallèles entre eux, de direction perpendiculaire à la droite des centres. $\square$

Exercice 5
Soient deux cercles Γ_1 et Γ_2 s'intersectant en deux points A et B. On considère une tangente commune à ces deux cercles, tangente en P à Γ_1 et en Q à Γ_2. Montrer que (AB) coupe $[PQ]$ en son milieu.

Exercice 6
Soient deux cercles Γ_1 et Γ_2 tangents extérieurement en un point T. On considère une tangente commune à ces deux cercles, tangente en P à Γ_1 et en Q à Γ_2. Montrer que le triangle PQT est rectangle.

Exercice 7
Soit ABC un triangle, H son orthocentre. Soient M un point quelconque sur le segment $[AB]$ et N un point quelconque sur le segment $[AC]$. On note P et Q les points d'intersection des cercles de diamètres respectifs $[BN]$ et $[CM]$. Montrer que les points P, Q, H sont alignés.

Exercice 8 (cercle d'Euler)
Soit ABC un triangle. On note M_A, M_B, M_C les milieux respectifs des côtés $[BC], [CA], [AB]$, et H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs issues de A, B, C respectivement.

1. Montrer que les six points $M_A, M_B, M_C, H_A, H_B, H_C$ sont cocycliques.
2. Soient A', B', C' les milieux respectifs des segments $[AH], [BH], [CH]$, où H est l'orthocentre de ABC. Montrer que A', B', C' sont cocycliques avec les six points mentionnés ci-dessus.

Exercice 9
Soient quatre points cocycliques A, B, C, D. Quel est le lieu des points M tels que le cercle circonscrit à MAB et le cercle circonscrit à MCD soient tangents ?

– Solutions des exercices –

Solution de l'exercice 1
Soit H l'orthocentre de ABC, H_A le pied de la hauteur issue de A. Par orthogonalité, H_A appartient aux cercles de diamètre $[AB]$ et $[AC]$. La puissance de H_A par rapport à ces cercles fournit respectivement : $HM \cdot HN = HA \cdot HH_A$, et : $HP \cdot HQ = HA \cdot HH_A$, d'où : $HM \cdot HN = HP \cdot HQ$. Par la réciproque de la puissance d'un point, on en déduit M, N, P, Q cocycliques.

Solution de l'exercice 2
Par le théorème 4.3.1, l'exercice revient à montrer que les points A, D, E, F sont cocycliques. On peut pour cela procéder par chasse aux angles à partir des angles α, β, γ du triangle ABC. D'une part : $\widehat{AFE} = \widehat{ACS} = \widehat{ACB} + \widehat{BAS} = \gamma + \frac{\alpha}{2}$, d'autre part : $\widehat{ADB} = \widehat{ACD} + \widehat{DAC} = \gamma + \frac{\alpha}{2}$. Ainsi : $\widehat{AFE} + \widehat{ADE} = 180°$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 3
Pour calculer $\frac{PQ}{QR}$ (resp. $\frac{TU}{ST}$), on va passer par la longueur intermédiaire QA (resp. TC).

$$\begin{aligned}
\frac{PQ}{QR} &= \frac{PQ}{QA} \cdot \frac{QA}{QR} \\
&= \frac{BC}{BA} \cdot \frac{QD}{QB} \quad \text{(les triangles } ABC \text{ et } AQP \text{ sont semblables par Thalès, } QA \cdot QB = QD \cdot QR \text{ par pui} \\
&= \frac{BC}{BA} \cdot \frac{TB}{TD} \quad (QBTD \text{ est un parallélogramme}) \\
&= \frac{TC}{TS} \cdot \frac{TU}{TC} \quad \text{(les triangles } ABC \text{ et } STC \text{ sont semblables par Thalès, } TB \cdot TC = TD \cdot TU \text{ par puiss} \\
&= \frac{TU}{TS}.
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4
Par la réciproque de la puissance d'un point, il suffit de montrer que : $HP \cdot HQ = HR \cdot HS$. Par chasse aux angles alternes-internes de la figure, il vient que les triangles ARH, AQH,

CPH, HSC sont semblables entre eux (et deux par deux isométriques). Fort de cela, on peut reprendre la stratégie de l'exercice précédent :

$$\begin{aligned}\frac{HQ}{HR} &= \frac{HQ}{HA} \cdot \frac{HA}{HR} \\ &= \frac{HS}{HC} \cdot \frac{HC}{HP} \quad \text{(les triangles } ABC \text{ et } AQP \text{ sont semblables par Thalès, } QA \cdot QB = QD \cdot QR \text{ par pu} \\ &= \frac{HS}{HP}.\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5

Soit M le point d'intersection de (AB) et (PQ). La puissance de M par rapport à Γ_1 est MP^2, celle par rapport à Γ_2 est MQ^2. M est sur l'axe radical (AB) de Γ_1 et Γ_2 (cas de deux cercles s'intersectant en deux points), d'où : $\mathcal{P}_{\Gamma_1}(M) = \mathcal{P}_{\Gamma_2}(M)$. Finalement : $MP = MQ$, M est bien le milieu de $[PQ]$.

Solution de l'exercice 6

Commençons par introduire la tangente commune Δ aux deux cercles en T. D'après l'exercice précédent (cas limite où l'axe radical correspond à Δ), elle coupe le segment $[PQ]$ en son milieu M. Par égalité de longueur des tangentes MP, MT et MQ, le point T est sur le cercle de diamètre $[PQ]$, d'où PQT rectangle en T.

Solution de l'exercice 7

Notons Γ_B le cercle de diamètre $[BN]$, Γ_C celui de diamètre $[CM]$. La droite (PQ) correspond à l'axe radical de Γ_B et Γ_C, il s'agit donc de montrer que H a même puissance par rapport aux deux cercles.

On remarque que les pieds H_B et H_C des hauteurs issues de B et de C vérifient : $H_B \in \Gamma_B$ et : $H_C \in \Gamma_C$. La puissance de H par rapport à Γ_B est alors $HB \cdot HH_B$, celle par rapport à Γ_C est $HC \cdot HH_C$. Par cocyclicité des points B, C, H_B, H_C, alors on a l'égalité : $HB \cdot HH_B = HC \cdot HH_C$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 8

Pour établir les cocyclicités, on va se servir de la réciproque de la puissance d'un point.

1. Puisque B, C, H_B, H_C sont cocycliques sur le cercle de diamètre $[BC]$, alors : $AH_B \cdot AC = AH_C \cdot AB$. En divisant par 2 de part et d'autre, on en déduit : $AH_B \cdot AM_B = AH_C \cdot AM_C$, d'où les points M_B, M_C, H_B, H_C cocycliques. Par le même raisonnement, il vient que M_A, M_C, H_A, H_C sont cocycliques, et de même pour M_A, M_B, H_A, H_B. Il reste à voir pourquoi les trois cercles ainsi formés sont en fait confondus. Si ce n'était pas le cas, par l'absurde, alors on aurait trois cercles $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ distincts. Leurs axes radicaux deux à deux seraient : $(M_AH_A) = (BC), (M_BH_B) = (AC), (M_CH_C) = (AB)$. Or ces droites ne sont ni concourantes ni parallèles, ce qui met en défaut le théorème 4.3.5. Ainsi, l'hypothèse était absurde, d'où $M_A, M_B, M_C, H_A, H_B, H_C$ cocycliques sur un même cercle Γ, appelé *cercle d'Euler*.

2. Montrons que A' appartient au cercle d'Euler : on procèdera alors de même pour B' et C'. Par cocyclicté des points B, H, H_A, H_C, on a : $AH_C \cdot AB = AH \cdot AH_A$. En divisant par 2, il vient : $AH_C \cdot AM_C = AA' \cdot AH_A$. Par la réciproque de la puissance d'un point, les points A', H_A, H_C, M_C sont cocycliques, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 9
Il s'agit de caractériser les points M qui vérifient la condition de l'énoncé. Soit Z le point d'intersection des droites AB et CD. L'avantage d'introduire ce point est que cela nous permet de connaître tous nos axes radicaux. En effet, pour tout point M, l'axe radical du cercle circonscrit à $ABCD$ et du cercle circonscrit à MAB est la droite AB, l'axe radical du cercle circonscrit à $ABCD$ et du cercle circonscrit à MCD est la droite CD, et l'axe radical du cercle circonscrit à MAB et du cercle circonscrit à MCD passe par M et est concourant aux deux autres axes radicaux (qui se coupent en Z) : c'est donc la droite ZM.

Ainsi, Z appartient aux trois axes radicaux, et donc la puissance de Z est la même par rapport aux trois cercles. Or les cercles circonscrits à MAB et à MCD sont tangents si et seulement si leur axe radical est leur tangente commune en M, autrement dit si et seulement si la droite ZM est leur tangente commune. C'est le cas si et seulement si la puissance de Z par rapport aux cercles circonscrits à MAB et à MCD vaut ZM^2, autrement dit si et seulement si $ZA \times ZB = ZC \times ZD = ZM^2$.

En bref, sachant que les points Z, A, B, C, D sont fixés, le point M satisfait la condition de l'énoncé si et seulement si $ZM = \sqrt{ZA \times ZB}$. Donc le lieu de nos points M est un cercle de centre Z et de rayon $\sqrt{ZA \times ZB}$.

4 Nombres complexes et géométrie

Ce cours a pour but de présenter les nombres complexes d'un point de vue géométrique. Il n'a pas pour ambition d'être complet ou rigoureux, mais de transmettre au lecteur une première intuition.

– Bric à brac des nombres complexes –

Considérons l'équation :

$$x^2 + 1 = 0$$

Il n'existe pas de solution dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels. On se propose de s'imaginer un « nombre » i tel que $i^2 = -1$. i est un nombre complexe et on définit alors :

Définition 4.4.1.
On définit l'ensemble des nombres complexes z, noté $\mathbb{C}$, comme l'ensemble des nombres de la forme $z = a + ib$, où $a, b \in \mathbb{R}$. Le réel a (resp. b) est nommé partie réelle (resp. partie imaginaire) de z, et est noté $Re(z)$ (resp. $Im(z)$). Si $b = 0$, z est un réel. Si $a = 0$, z appartient à l'ensemble des imaginaires purs, noté $i\mathbb{R}$.

On définit l'addition et la multiplication comme extention naturelle à celles sur l'ensemble des réels :

Définition 4.4.2.
Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ tels que $z = a + ib$ et $z' = c + id$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On définit :

$$z + z' = (a + c) + i(b + d)$$

$$z.z' = (ac - bd) + i(bc + ad)$$