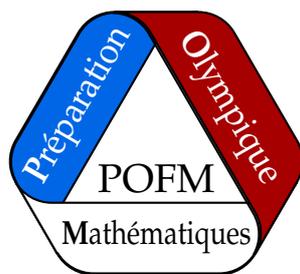


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 14 ET DU 21 FÉVRIER 2021

DURÉE : 4H

Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2006 ou après. Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- ▷ Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2005 ou avant. Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- ▷ Le **groupe EGMO** est constitué des élèves nées en 2005 ou avant et éligibles à l'EGMO. Ces élèves doivent traiter les exercices 8 à 10.
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- ▷ Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire (au moins) une figure pertinente sur une feuille séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, si l'on souhaite démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.
- ▷ Si l'élève ne respecte pas la consigne précédente, il perdra automatiquement un point à l'exercice concerné (on ne donne pas de note strictement négative).

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique via le formulaire de dépôt disponible à l'adresse suivante :

<http://igm.univ-mlv.fr/~juge/pofm/form/>

Énoncés Junior

Exercice 1. Soit a, b, c et d quatre nombres réels. On suppose qu'il existe une permutation (x, y, z, t) des nombres a, b, c et d telle que

$$x \leq 2a - b, y \leq 2b - c, z \leq 2c - d \text{ et } t \leq 2d - a.$$

Démontrer que $a = b = c = d$.

Exercice 2. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 3. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 4. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Énoncés Senior

Exercice 5. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 6. Trouver le plus grand entier $n \geq 3$ pour lequel il existe un ensemble \mathcal{S} de n points du plan avec la propriété suivante : tout triangle (même plat) dont les sommets appartiennent à \mathcal{S} est isocèle mais pas équilatéral.

Exercice 7. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Énoncés EGMO

Exercice 8. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 9. Soit n un entier naturel. Démontrer que l'écriture de l'entier $n(2^n - 1)$ en base 2 compte exactement n occurrences du chiffre 1.

Exercice 10. Soit ABC un triangle. On note H_A le pied de la hauteur de ABC issue de A , et A' le milieu du segment $[BC]$. On note ensuite Q_A la symétrique de H_A par rapport à A' . On définit de même les points Q_B et Q_C . Enfin, on note R le point d'intersection, autre que Q_A , entre les cercles circonscrits aux triangles Q_AQ_BC et Q_ABQ_C .

Démontrer que les droites (Q_AR) et (BC) sont perpendiculaires.