PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 5 : POT-POURRI

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 27 MARS 2021

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2006 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés "Juniors" ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés "Seniors" ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soient a et b des entiers positifs impairs tels que $a^b b^a$ est un carré parfait. Montrer que ab est un carré parfait.

Exercice 2. Dans un triangle acutangle ABC, la médiane $[AM]$ issue de A a la même longueur que la hauteur $[BH]$ issue de B, et $\widehat{MAC} = \widehat{HBC}$. Montrer que ABC est un triangle équilatéral.
Un triangle est dit acutangle si tous ses angles sont aigus.

Exercice 3. Trouver tous les réels x, y et z tels que

$$\begin{cases} x^2 - 4y + 7 = 0 \\ y^2 - 6z + 14 = 0 \\ z^2 - 2x - 7 = 0 \end{cases}$$

Exercice 4. Trouver tous les entiers positifs x et y tels que $x^2 - 2 \times y! = 2021$.

Exercice 5. On considère un $15-$gone de périmètre 21. Montrer qu'il existe 3 sommets formant un triangle d'aire au plus 1.

Exercice 6. Soit ABC un triangle, dont $[BC]$ est le côté le plus petit. Montrer qu'il existe un point P tel que, étant donné un point quelconque X sur le segment $[BC]$, si on construit les points Y, Z sur les côtés $[AC]$ et $[AB]$ respectivement de sorte que $CY = CX$ et $BZ = BX$, le cercle circonscrit au triangle AYZ passe par le point P.

Exercice 7. Trouver tous les entiers $n \geqslant 1$ pour lesquels il existe n entiers $a_1, \dots, a_n$ tels que a_i soit le nombre d'éléments divisibles par i parmi $a_1, \dots, a_n$.

Exercice 8. Soient a, b et c des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{a^3 + 5b^3}{3a + b} + \frac{b^3 + 5c^3}{3b + c} + \frac{c^3 + 5a^3}{3c + a} \geqslant \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Exercice 9. Soit S un sous-ensemble de $\{1, \dots, 100\}$ possédant 16 éléments. Montrer qu'il existe quatre éléments distincts $a, b, c, d \in S$ tels que $a + b = c + d$.

Exercices Seniors

Exercice 10. Soient a et b des entiers positifs impairs tels que $a^b b^a$ est un carré parfait. Montrer que ab est un carré parfait.

Exercice 11. Soit ABC un triangle. Sur les droites (AB) et (AC), on construit respectivement des points A_B et A_C de telle sorte que A soit dans les segments $[BA_B]$ et $[CA_C]$ et que $AA_B = AA_C = BC$. On définit de même les points B_A, B_C et C_A, C_B du côté de B et C respectivement. Montrer que les points A_B, A_C, B_A, B_C, C_A et C_B sont sur un même cercle.

Exercice 12. Soient a, b, c des entiers strictement positifs tels que $\frac{a^2-a-c}{b} + \frac{b^2-b-c}{a} = a + b + 2$. Montrer que $a + b + c$ est un carré parfait.

Exercice 13. Soit n un entier strictement positif. Trouver le plus grand entier k, dépendant de n, tel qu'il existe un sous-ensemble S de $\{1, \dots, 2n-1\}$ possédant k éléments et tel que si a, b et c sont trois éléments de S pour lesquels $a + b = c$, l'égalité $a = b$ est nécessairement satisfaite.

Exercice 14. Soit p un nombre premier et $a_k \cdots a_0$ son écriture en base 10. On pose

$$Q_p(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Montrer que Q_p n'a pas de racines entières, sauf pour 4 valeurs de p que l'on déterminera.

Exercice 15. Prouver que pour tout nombre premier $p \geqslant 5$ et tous nombres entiers $a, b \geqslant 1$, on a $\binom{pb}{pa} \equiv \binom{b}{a} \pmod{p^3}$.

Exercice 16. On considère un collier circulaire avec 2021 perles. Chaque perle peut être coloriée en blanc ou en vert. Un coloriage du collier est dit *chic* si, parmi 21 perles consécutives, il y a toujours au moins une perle verte. Montrer que le nombre de coloriages chics du collier est impair.

Exercice 17. Deux cercles ω_1 et ω_2 se coupent en P et Q. Une droite arbitraire passant par P recoupe ω_1 en A et ω_2 en B. Une droite parallèle à (AB) coupe ω_1 en D, F et ω_2 en E, C de sorte que E et F se trouvent entre C et D. Soit X le point d'intersection des droites (AD) et (BE), Y celui des droites (BC) et (AF). Soit R le symétrique de P par rapport à (CD). Montrer que (PR) est la bissectrice de $\widehat{XPY}$.

Exercice 18. Soient p et q des nombres premiers, avec $p < q$. On suppose qu'il existe un polygone convexe $P_1P_2 \cdots P_{pq}$ dont tous les angles sont égaux et dont les longueurs des côtés sont des entiers distincts. Montrer que, pour tout entier $k \leqslant p$, on a

$$P_1P_2 + P_2P_3 + \cdots + P_kP_{k+1} \geqslant \frac{k^3+k}{2}.$$