III. Débutants

1 Le matin : stratégies de base et combinatoire

1 mardi 24 matin : Cindy Hua

Ce cours porte sur le théorème des tiroirs et ses applications.

Forme simple et première approche

Sauf mention contraire, n désignera un entier naturel non nul.

L'idée du principe des tiroirs est intuitive : si nous avons n tiroirs ($n \in \mathbb{N}^*$) et $n+1$ chaussettes, alors il existe un tiroir contenant au moins 2 chaussettes.

Exercice 1 : Nous disposons de $n \in \mathbb{N}^*$ paires de chaussettes de couleurs différentes. Combien faut-il en prendre pour garantir d'en avoir deux de même couleur ?

Exercice 2 : 51 nombres sont choisis entre 1 et 100 inclus. Montrer qu'il existe deux nombres consécutifs.

Exercice 3 : On considère un plan dont tous les points sont colorés en rouge ou en bleu. Montrer qu'il existe deux points de distance 1 de même couleur.

Exercice 4 : On considère un carré de coté 2 et 5 points dans ce dernier. Montrer qu'il existe deux de ces points dont la distance est inférieure à $\sqrt{2}$.

Exercice 5 : Montrer que dans un groupe de $n \in \mathbb{N}^*$ personnes, il existe deux personnes ayant le même nombre d'amis (on considèrera la relation "être ami" réciproque).

Exercice 6 : Montrer que parmi n+1 entiers, on peut en trouver 2 tels que leur différence est divisible par n.

Exercice 7 : Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un entier dont l'écriture décimale est composée uniquement de 0 et de 5, qui est divisible par n.

Exercice 8 : Sur un cercle de périmètre p, on marque les trois sommets d'un triangle équilatéral ainsi que les quatre sommets d'un carré. Ces sept points divisent le cercle en 7 arcs. Prouver que l'un de ces arcs est de longueur ne dépassant pas $\frac{p}{24}$.

Exercice 9 : On choisit 10 entiers distincts entre 1 et 100 inclus. Montrer qu'il existe deux sous-ensembles disjoints formés de ces 10 nombres tels que la somme de leurs termes soit égale.

Exercice 10 : Soient a_1, a_2,..., a_n n entiers. Montrer qu'il existe un sous-ensemble de $a_1, a_2, ..., a_n$ dont la somme des éléments est divisible par n.

Exercice 11 : On considére un plan dont tous les points sont colorés en rouge ou en bleu. Montrer qu'il existe un triangle équilatéral de côté 1 ou de côté $\sqrt{3}$ dont les sommets sont de même couleur.

Généralisation

Et s'il y avait beaucoup plus que $n+1$ chaussettes ?

Principe des tiroirs : Si n chaussettes sont placées dans $k \in \mathbb{N}^*$ tiroirs, au moins un tiroir contiendra $\lceil n/k \rceil$ chaussettes ou plus.

Exercice 12 (Nombre de Ramsey $R(3,3)$) : Considérons 6 points dans un plan. Toutes les arêtes formées par deux de ces points sont colorées en rouge ou en bleu. Montrer qu'il existe un triangle formé par trois de ces points ayant leurs cotés d'une unique couleur.

Exercice 13 : 51 points sont placés dans un carré de côté 1. Montrer qu'il existe trois points qui peuvent être dans un même disque de rayon $\frac{1}{7}$.