Monovariants - Groupe C - avec solutions

Victor Vermès - 7 février 2021
En cas de question n'hésitez pas à envoyer un mail à *victor.vermes@animath.fr*.

Un *invariant* est, comme son nom l'indique, une quantité qui ne change pas lorsque l'on exécute un certain nombre d'opérations. Un *monovariant* est une quantité qui varie de façon monotone (croissante ou décroissante), éventuellement strictement. Les exercices suivants peuvent être résolus en exhibant un bon *monovariant*.

Exercice 1 Baptiste le magicien dispose devant lui un certain nombre de cartes, placées en ligne de gauche à droite, soit face cachée, soit face visible. Baptiste peut effectuer l'opération suivante : il choisit deux cartes consécutives, et si la carte de gauche est face visible, il peut retourner cette carte ainsi que la suivante. Il va effectuer successivement cette opération. Montrer que Baptiste ne peut pas effectuer cette opération indéfiniment et s'arrête nécessairement.

Solution de l'exercice 1 Extrait du film *le monde de Nathan*

`https://www.youtube.com/watch?v=mYAahN1G8Y8&ab_channel=PinnacleFilmsSales`

Exercice 2 On part d'une suite $a_1, a_2, ..., a_n$ d'entiers strictement positifs. Tant que cela est possible, on choisit $j < k$ tels que a_j ne divise pas a_k et que a_k ne divise pas a_j, et on remplace a_j et a_k par $\mathrm{PGCD}(a_j, a_k)$ et $\mathrm{PPCM}(a_j, a_k)$, respectivement. Montrer que cette si l'on répète cette procédure, on finit par s'arrêter.

Solution de l'exercice 2 La somme des éléments augmente strictement à chaque étape, mais le produit reste constant, car on vérifie que la somme du PGCD et du PPCM est plus grande que la somme des deux nombres initiaux (si aucun des deux nombres ne divise l'autre). Or la somme est bornée par le nombre de nombres fois le produit (si chaque nombre est plus que 1, car chaque nombre est alors borné par le produit), donc on ne peut pas effectuer une infinité d'étapes.

Exercice 3 n points du plan sont coloriés en rouge, n autres le sont en bleu. 3 points parmi ces $2n$ ne sont jamais alignés. Est-il possible de tracer n segments reliant un point rouge à un point bleu, chaque point étant utilisé une seule fois, de manière à ce que deux segments ne s'intersectent jamais ?

Solution de l'exercice 3 On relie d'abord les points de manière arbitraire. Ensuite, on va considérer l'opération de "décroisement" : on prend une paire de chemins croisés et on les décroise. Cela diminue la longueur. La somme totale des longueurs des chemins est donc un monovariant, qui diminue strictement à chaque étape. De plus, il n'y a qu'un nombre fini de configurations de chemins possibles, donc le nombre d'opération que l'on peut faire successivement est fini. On arrive donc à une configuration où on ne peut plus faire de décroisement, c'est-à-dire une configuration sans croisement. Notons qu'on aurait pu directement regarder la configuration qui minimise la longueur totale des chemins.

Exercice 4 Sur une grille de 10×10 cases, on colorie initialement 9 cases. Ensuite, si une case à au moins deux cases voisines coloriées (pour les cases du coin, cela veut par exemple dire que toutes ses voisines sont coloriées), on peut colorier cette nouvelle case. Montrer qu'on ne peut pas ainsi colorier l'intégralité de la grille.

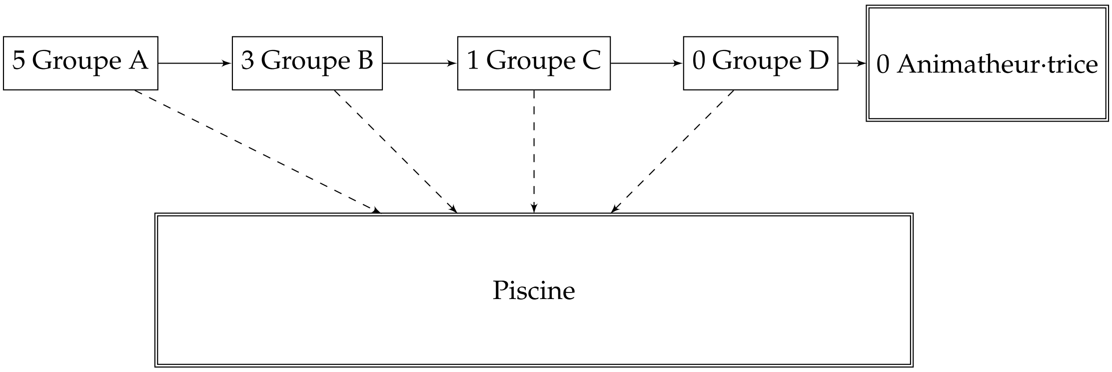
Solution de l'exercice 4 Le périmètre de la figure est un monovariant, il vaut au plus 9×4 dans la configuration initiale et vaut 40 pour le carré 10×10

Exercice 5 Dans le stage de Valbonne, il y a initialement 5 élèves dans le groupe A, 3 dans le groupe B, 1 dans le groupe C, aucun·e dans le groupe D, et aucun·e animateur·rice.

Chaque jour, un certain nombre d'élèves sont promus dans le groupe suivant, alors que d'autres choisissent d'aller se baigner à la piscine jusqu'à la fin du stage, et de quitter leur groupe. Si un·e élève du groupe D est promu·e, il ou elle devient animateur·rice, autrement dit le graal !

Plus précisément, chaque jour Raphaël, le directeur de stage, va séparer l'ensemble des élèves en deux parties. Les élèves d'une de ces deux parties seront promus, alors que les élèves de l'autre partie iront se baigner jusqu'à la fin du stage. Ce sont les élèves, et pas Raphaël, qui choisissent quel groupe va se baigner et quel groupe est promu.

Raphaël peut-il toujours faire en sorte qu'il y ait au moins un·e animateur·rice avant la fin du stage ?



Solution de l'exercice 5 On attribue à un élève du groupe A un poids 1, du groupe B un poids 2, groupe C un poids 4, groupe D un poids 8 et à un animatheur un poids 16. Le poids initial est 15. De plus, si l'on sépare les élèves en deux groupes, un des groupes aura un poids plus petit que 15/2, et quand ce groupe sera promu, son poids doublera et restera donc inférieur à 15. Donc les élèves peuvent faire en sorte que le poids du groupe diminue (pas nécessairement strictement) à chaque étape, et donc que ce poids n'atteigne jamais 16. Il n'y aura donc pas d'animatheur.

Exercice 6 Trois fourmis se déplacent sur le plan cartésien de la manière suivante. Chaque minute, deux des fourmis vont rester immobiles, et la troisième fourmi se déplacera sur une droite parallèle à la droite formée par ses deux comparses ; elle peut bien sûr rester immobile elle aussi si cela lui chante. Originellement, les trois fourmis se situent en trois points de coordonnées $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$. Est-il possible que, au bout d'un certain temps, nos trois fourmis se retrouvent en les points de coordonnées $(-1,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$?

Solution de l'exercice 6 L'aire du triangle est monovariante, puisqu'à chaque fois on fixe une base et une hauteur. L'aire initiale est $1/2$ et ne pourra donc jamais valoir 1.

Exercice 7 On part d'un mot constitué de lettres a et b, par exemple ababaaaab. On considère la transformation suivante : ab $\longrightarrow$ baa. On peut par exemple transformer ab**ab**aaaab en ab**baa**aaaab. Existe-t-il des mots de départs pour lesquels on puisse faire des transformation indéfiniment ?

Solution de l'exercice 7 Dans tout mot x, on numérote les a de gauche à droite comme sur la figure (avec n le nombre de a dans le mot), et on note pour tout $1 \leqslant i \leqslant n, b_i$ le nombre total de b à droite du i-ème a. Alors $M_x = \sum_{i=1}^{n}(2^{b_i} - 1)$ est un monovariant.