

Monovariants - Groupe C

Victor Vermès - 7 février 2021

En cas de question n'hésitez pas à envoyer un mail à victor.vermes@animath.fr.

Un *invariant* est, comme son nom l'indique, une quantité qui ne change pas lorsque l'on exécute un certain nombre d'opérations. Un *monovariant* est une quantité qui varie de façon monotone (croissante ou décroissante), éventuellement strictement. Les exercices suivants peuvent être résolus en exhibant un bon *monovariant*.

Exercice 1 Baptiste le magicien dispose devant lui un certain nombre de cartes, placées en ligne de gauche à droite, soit face cachée, soit face visible. Baptiste peut effectuer l'opération suivante : il choisit deux cartes consécutives, et si la carte de gauche est face visible, il peut retourner cette carte ainsi que la suivante. Il va effectuer successivement cette opération. Montrer que Baptiste ne peut pas effectuer cette opération indéfiniment et s'arrête nécessairement.

Exercice 2 On part d'une suite a_1, a_2, \dots, a_n d'entiers strictement positifs. Tant que cela est possible, on choisit $j < k$ tels que a_j ne divise pas a_k et que a_k ne divise pas a_j , et on remplace a_j et a_k par $\text{PGCD}(a_j, a_k)$ et $\text{PPCM}(a_j, a_k)$, respectivement. Montrer que si l'on répète cette procédure, on finit par s'arrêter.

Exercice 3 n points du plan sont coloriés en rouge, n autres le sont en bleu. 3 points parmi ces $2n$ ne sont jamais alignés. Est-il possible de tracer n segments reliant un point rouge à un point bleu, chaque point étant utilisé une seule fois, de manière à ce que deux segments ne s'intersectent jamais ?

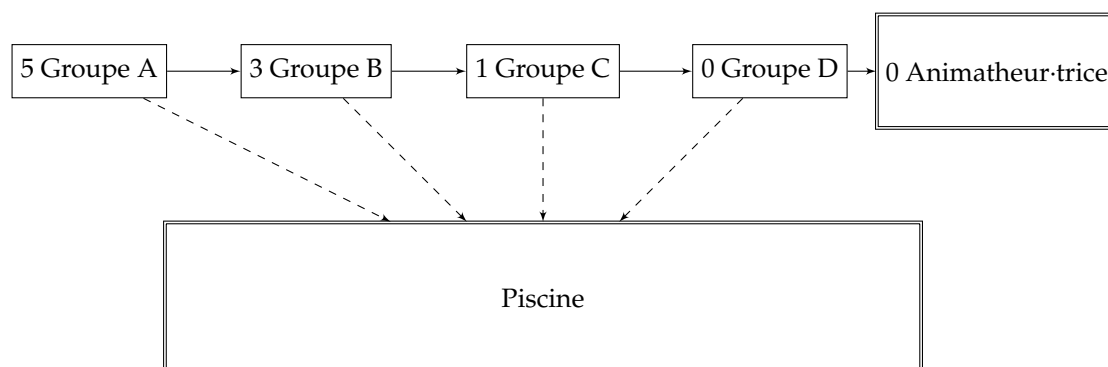
Exercice 4 Sur une grille de 10×10 cases, on colorie initialement 9 cases. Ensuite, si une case à au moins deux cases voisines coloriées (pour les cases du coin, cela veut par exemple dire que toutes ses voisines sont coloriées), on peut colorier cette nouvelle case. Montrer qu'on ne peut pas ainsi colorier l'intégralité de la grille.

Exercice 5 Dans le stage de Valbonne, il y a initialement 5 élèves dans le groupe A, 3 dans le groupe B, 1 dans le groupe C, aucun-e dans le groupe D, et aucun-e animateur·rice.

Chaque jour, un certain nombre d'élèves sont promus dans le groupe suivant, alors que d'autres choisissent d'aller se baigner à la piscine jusqu'à la fin du stage, et de quitter leur groupe. Si un·e élève du groupe D est promu·e, il ou elle devient animateur·rice, autrement dit le graal !

Plus précisément, chaque jour Raphaël, le directeur de stage, va séparer l'ensemble des élèves en deux parties. Les élèves d'une de ces deux parties seront promus, alors que les élèves de l'autre partie iront se baigner jusqu'à la fin du stage. Ce sont les élèves, et pas Raphaël, qui choisissent quel groupe va se baigner et quel groupe est promu.

Raphaël peut-il toujours faire en sorte qu'il y ait au moins un·e animateur·rice avant la fin du stage ?



Exercice 6 Trois fourmis se déplacent sur le plan cartésien de la manière suivante. Chaque minute, deux des fourmis vont rester immobiles, et la troisième fourmi se déplacera sur une droite parallèle à la droite formée par ses deux comparses ; elle peut bien sûr rester immobile elle aussi si cela lui chante. Originellement, les trois fourmis se situent en trois points de coordonnées $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$. Est-il possible que, au bout d'un certain temps, nos trois fourmis se retrouvent en les points de coordonnées $(-1, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$?

Exercice 7 On part d'un mot constitué de lettres a et b, par exemple ababaaaab. On considère la transformation suivante : $ab \rightarrow baa$. On peut par exemple transformer ab**a**baaaaab en ab**ba**aaaaab. Existe-t-il des mots de départ pour lesquels on puisse faire des transformation indéfiniment?