TD groupe B tiroirs/dénombrement

Antoine Derimay

6 février 2021

On corrigera en priorité les exercices $1, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 14$, et d'autres s'il reste du temps.

Exercice 1
Combien d'enfants faut-il au minimum dans une école pour que l'on soit sûr que 3 d'entre eux au moins aient leur anniversaire le même jour ? (on considère aussi le 29 février)

Exercice 2
On considère un groupe de n personnes ($n > 1$), dans lequel certaines personnes se serrent la main.
Prouver qu'il existe au moins deux personnes ayant donné le même nombre de poignées de main.

Exercice 3
On colorie le plan de deux couleurs différentes, montrer qu'il existe deux points de la même couleur à un mètre de distance.

Exercice 4
On considère 5 points dans un carré de côté 2, montrer qu'il y en a deux qui sont à distance au plus $\sqrt{2}$ l'un de l'autre.

Exercice 5
Combien d'entiers au minimum doit-on sélectionner dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 20\}$ pour être sûr que parmi ceux-ci on ait deux entiers a et b tels que $a - b = 2$?

Exercice 6
On considère S une partie de l'ensemble des parties de $\{1, 2, \ldots n\}$, telle que deux éléments de S ne soient jamais disjoints.
Montrer que S est de cardinal au plus 2^{n-1}.
Montrer que cette borne est atteinte.

Exercice 7
Soient $a_1, \ldots a_n$ des entiers relatifs pas forcément distincts, montrer qu'il existe $0 \leqslant k < l \leqslant n$ tels que la somme $a_{k+1} + \ldots a_l$ soit divisible par n.

Exercice 8
Sur un tableau sont écrits 20 nombres distincts entre 1 et 64. Sur un autre tableau sont écrites toutes les différences qu'on puisse calculer avec ces nombres. Montrer qu'un nombre est écrit quatre fois sur ce deuxième tableau.

Exercice 9
On choisit dix entiers quelconques à 2 chiffres. Montrer que parmi eux, on peut trouver deux sous-ensembles disjoints de même somme.

Exercice 10
Simplifier le rapport
$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}.$$
En déduire que pour tout k, $\binom{2n}{k} \leqslant \binom{2n}{n}$, puis une minoration de $\binom{2n}{n}$.
Remarque : on peut en fait montrer que $\binom{2n}{n} \approx \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$.

Exercice 11
Calculer
$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \cdots + \binom{r}{n} = \binom{r+1}{n+1}.$$
Indice : Dessiner le triangle de Pascal.

Exercice 12
Parmi les entiers plus petits que 10000, combien sont ni multiples de 3, ni de 5, ni de 7 ?

Exercice 13 (Morphisme de Frobenius)
1)Soit p un nombre premier, montrer que $\binom{p}{k}$ est divisible par p pour $1 \leqslant k \leqslant p-1$.
2) Montrer que $(x+y)^p \equiv x^p + y^p \pmod p$

Exercice 14 (Identité de Vandermonde)
En développant l'expression $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$ de deux manières différentes, montrer que si $0 \leqslant r \leqslant m+n$, on a
$$\binom{m+n}{r} = \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \cdots + \binom{n}{r-1}\binom{m}{1} + \binom{n}{r}\binom{m}{0}.$$
En déduire la valeur de
$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2.$$