Exercice 1 : Soit n réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ non tous nuls, dont la somme est 0. Montrer qu'on peut les réarranger $a_1, a_2, \dots, a_n$ tel que :

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n < 0$$

Exercice 2 : Soit une compétition telle que chacun des 6 exercices a été résolu par au moins 120 des 200 participants. Montrer qu'on peut trouver 2 participants tel que chaque exercice a été résolu par au moins un des deux.

Exercice 3 : (Test Sélection Iran 2008) On considère 799 équipes de football dans un tournoi tel qu'il y a un match entre chaque paire d'équipes, qui ne peut pas se finir en égalité. Montrer qu'il existe deux ensembles A et B chacun de cardinal 7 tels que chaque équipe de A a battu chaque équipe de B.

Exercice 4 : (Théorème de Sperner) Soit X un sous-ensemble de $\mathbb{P}([n])$ tel que pour tous $A, B \in X$ avec $A \neq B$, A n'est pas inclus dans B. Montrer que $|X| \leq \binom{n}{\frac{n}{2}}$ avec égalité si et seulement n est pair et $X = [n]^{\frac{n}{2}}$ ou $n = 2m+1$ est impair et $X = [n]^m$ ou $X = [n]^{m+1}$ ($[n]^r$ étant l'ensemble des sous-ensembles de $[n]$ de cardinal r)

Exercice 5 : Soit G un graphe à n sommets et de degré moyen d. Montrer que l'on peut trouver un ensemble S de sommets indépendant de cardinal au moins $\frac{n}{d+1}$ (un ensemble de sommets est dit indépendant si chaque paire de sommets n'admet pas d'arêtes)

Exercice 6 : Soit n un graphe tel que chaque sommet a un degré d'au moins $d = \sqrt{n}$. Montrer que pour tout n suffisamment grand, il existe un ensemble A d'au plus $2\sqrt{n}\log(n)$ sommets tel que tout sommet n'appartenant pas à A est voisin d'au moins un élément de A.

Exercice 7 : Soit $11n$ points sur un cercle que l'on colorie avec n couleurs de telle sorte que chaque couleur soit utilisée pour exactement 11 points. Montrer que l'on peut choisir un point de chaque couleur sans avoir deux points adjacents.

Exercice 8 : (Théorème d'Erdos-Ko-Rado) Soit $r \leq 2n$, et soit $A \subset [n]^r$ tel que toute paire d'éléments de A ait une intersection non vide. Montrer que $|A| \leq \binom{n-1}{r-1}$

Exercice 9 : Soit G un graphe tel que chaque sommet a un degré compris entre 50 et 100. Montrer que l'on peut colorier les sommets de ce graphe avec au plus 114 couleurs tel que chaque sommet a au moins 20 voisins coloriés de couleurs distinctes.