Combinatoire Groupe A

16 février 2021

1 Principe des tiroirs.

Le principe des tiroirs peut sembler tout bète mais c'est une astuce que l'on peut retrouver très souvent dans des exercices de combinatoire. Ça peut donner des solutions très courtes et faciles alors qui serait presque impossible sans cela.

Théorème. *Avec n éléments dans k ensembles. Si $k < n$ alors il y a un ensemble qui contient aux moins 2 éléments.*

Exemple. Si dans 10 tiroirs il y a 11 chaussettes, alors il existe un tiroir qui contient au moins 2 chaussettes.

En effet si tous les tiroirs contiennent 1 chaussette ou zéro, au total ça moins que 10 chaussettes.

Exercice. On a n paires de chaussettes toutes les paires sont de couleurs différentes. Question : Combien de chaussettes faut il prendre pour être sur d'en avoir 2 chaussettes de la même couleurs.

Solution. Les « n couleurs » sont « n tiroirs ». Donc si on prend n+1 chaussettes par principe des tiroirs au moins deux sont de la même couleur. Par contre avec n chaussettes, il est possible d'en choisir une de chaque couleur donc ce n'est pas suffisant. Conclusion : la réponse est n+1.

Exercice. Prenons 51 nombres différent entre 1 et 100. Montrer qu'il y en a au moins deux nombres consécutifs.

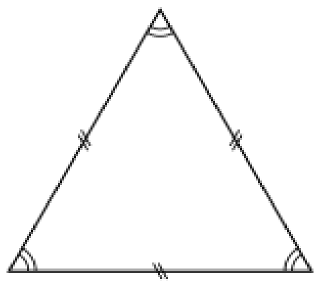
Solution. On écrit les entiers de 1 à 100 dans les « 50 tiroirs » suivant
- Tiroir 1 : (1,2)
- Tiroir 2 : (3,4)
- ...
- Tiroir 50 : (99,100)

Puisqu'il y a 51 nombres, par principe des tiroirs il y a au moins une de ces paires qui contient 2 nombres et donc il existe bien deux nombres consécutifs.

(Exo bis : doit-il y avoir 3 nombres consécutifs ? Non contre example : 1,3,5,...,97,99 et 100)

Exercice. Dans le plan tous les points du plan sont colorié en rouge ou bleu. Montrer qu'il existe au moins 2 points à une distance de 1 et de même couleur.

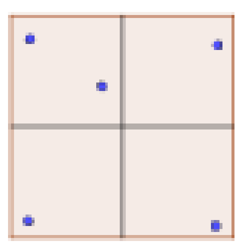
Solution. Soit un triangle ABC équilatérale de coté 1. De quel couleurs sont A, B et C ?



On a ici trois points et seulement 2 couleurs différentes. Donc il existe (principe des tiroirs) au moins 2 points qui ont la même couleur. Il existe donc 2 points dans le plan qui ont la même couleurs et sont à une distance 1.

Exercice. On considère un carré de côté 2 et 5 points dans ce carré. Montrer qu'il existe au moins 2 points qui sont à une distance inférieur ou égale à $\sqrt{2}$.

Solution. On divise le carré en 4 petits carré de coté 1. Par principe des tiroirs il existes au moins un petit carré qui contient 2 points.



Quel est la distance maximale possible entre ces deux points ? Dans un carré de coté 1 : la distance maximal correspond à la diagonal d et par le théorème de Pythagore $d^2 = 1^2 + 1^2$ soit $d = \sqrt{2}$.

Exercice. Soit un groupe de n personnes. Montrer qu'il existe au moins 2 personnes qui ont le même nombre d'amis.

Solution. On numérote le nombre d'amis possible : 0,1,...,(n-1). Cela donne n tiroirs possibles, il faut alors travailler un peu plus pour appliquer le théorème des tiroirs. On distingue plusieurs cas :

— Premier cas : Une personne est ami avec tout le monde (son nombre d'ami est n-1). Alors tout le monde est ami avec cette personne donc aucune personne n'a 0 amis : Donc les nombres d'amis possibles sont 1,...,(n-1) Donc n-1 tiroirs. Par principe des tiroirs 2 personnes ont le même nombre d'amis.
— Deuxième cas : il n'y a personne qui est ami avec tout le monde. Donc les nombres d'amis possibles sont 0,1,...,(n-2) soit n-1 tiroirs. Et on peut également utiliser le principe des tiroirs pour conclure.

Exercice. Pami $n+1$ nombres montrer qui existe 2 nombres dont la différence est divisible par n.

Solution. On peut essayer sur un exemple très simple $n = 2$. Si on a trois nombre : au moins 2 sont pairs ou au moins 2 sont impairs (par principe des tiroirs). La différence entre 2 nombre pairs donne nombre pairs et la même chose pour 2 nombres impairs et on a gagné. En fait on a fait ici deux tiroirs le premier tiroir si le reste de la division (euclidienne) par 2 est 0 (= les paires), et ceux dont le reste de la division euclidienne est 1 (= les impaires). Pour n quelconque on va faire la même chose mais en faisant la division euclidienne par n.

Soit n (quelconque), on note nos $n+1$ nombres $x_1, \cdots, x_{n+1}$ et pour chacun d'eux on regarde le reste de la division euclidienne par n :
— $x_1 = k_1 \times n + r_1$ avec $0 \leq r_1 \leq n-1$, (exemple avec $n = 7$ et $x_1 = 23$: $23 = 3 \times 7 + 2$, $0 \leq 2 \leq 6$)
— $x_2 = k_2 \times n + r_2$ avec $0 \leq r_2 \leq n-1$,
— ....
— $x_{n+1} = k_{n+1} \times n + r_{n+1}$ avec $0 \leq r_{n+1} \leq n-1$.
Comme $0 \leq r \leq n-1$ il y a ici « n-tiroirs » possibles et donc il existe au moins deux nombres x_i et x_j qui ont le même reste par la division euclidienne. On écrit

$$x_i = k_i \times n + r_i \text{ et } x_j = k_j \times n + r_j$$

et $r_i = r_j$ (par exemple ça pourrait être $x_1 = 23 = 3\times7+2$ et $x_5 = 37 = 5\times7+2$). Dans ce cas

$$x_i - x_j = k_i \times n + \cancel{r_i} - k_j \times n - \cancel{r_i} = (k_i - k_j) \times n$$

(par exemple $37 - 23 = (5-3) \times 7 = 14$). On en déduit alors que $x_i - x_j$ est divisible par n.

Remarque. On peut aussi écrire la preuve avec les modulos (c'est exactement la même chose). Cela donne $x_1 = r_1[n]$, $x_2 = r_2[n]$, ... Par principe des tiroirs il existe i et j : $x_i = x_j[n]$ et donc $(x_i - x_j) = 0[n]$ et donc que n divise $x_i - x_j$.

Exercice. Soit n un entier. Montrer qu'il existe un entier non nul dont l'écrire est composé uniquement de 0 et de 5 et qui est divisible par n.

Exemple pour $n = 2$: 50, pour $n = 3$: 555,... (Indice : Exercice précédent !)

Solution. On considère les nombres écrit qu'avec des 5 : $5, 55, 555, 5555, \cdots, 555555555, \cdots$ et on en choisit $n + 1$. Par l'exercice précédent il en existe 2 dont la différence est divisible par n. Lorsque l'on soustrait ces deux nombres, par exemple : $55555555 - 55555 = 55500000$ on obtient quelque chose qui n'a que des 0 ou des 5 et qui aussi divible par n.

Il existe une version plus générale du principe des tiroirs. Même si elle est un peu moins utilisée, c'est bien de l'avoir aussi en tête.

Théorème. *Avec n éléments dans k ensembles. Si $kp < n$ alors il y a un ensemble qui contient aux moins $p + 1$ éléments.*

2 Dénombrement, coefficient binomiaux.

Définition. Les coefficiient binomiaux, notés $\binom{n}{k}$, sont « le nombre de façon de choisir k éléments parmi n éléments. »

Attention l'ordre dans lesquels les élements sont choisit n'a pas d'importance. Une manière de voir est d'imaginer un colier avec n perles dont k noires et les autres blanches. On demande combien de coliers différents sont possibles.

Exemple. On a

— $n = 4$: $\{1, 2, 3, 4\}$ et $k = 2$: les possibilités sont $\{1, 2\}$,$\{1, 3\}$,$\{1, 4\}$,$\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$. Donc $\binom{4}{2} = 6$.

— $\binom{4}{1} = 4$ car on a $\{1\}\{2\}\{3\}\{4\}$.

— $\binom{4}{3} = 4$ car $\{1, 2, 3\}$,$\{1, 2, 4\}$,$\{1, 3, 4\}$,$\{2, 3, 4\}$.

Quelques cas très simple :

Proposition. .

1. *Si $k > n$ $\binom{n}{k} = 0$. (impossible de choisir plus que n éléments). En pratique on suppose toujours $k \leq n$.*
2. $\binom{n}{0} = 1$, *(on ne choisit aucun éléments)*
3. $\binom{n}{n} = 1$ *(on choisit tous les éléments)*
4. $\binom{n}{1} = n$ *(on a n choix pour notre élément)*

Proposition. .

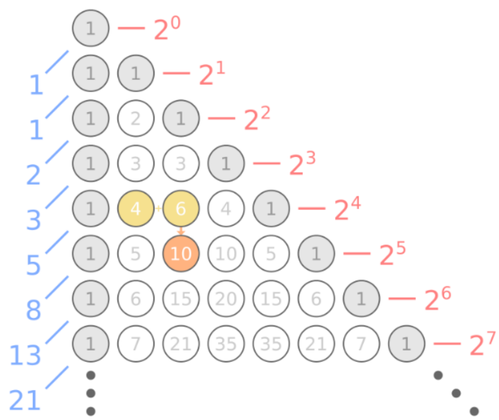
1. *: « choisir k éléments parmi n c'est la même chose que choisir les (n-k) autres. »*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

2. *« Si on choisit le premier élément il faut ensuite choisir (k-1) éléments parmi les (n-1) restant. Et si on ne choisit pas le premier élément il faut alors choisir k éléments parmi les (n-1) restant.»*

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Cette dernière formule est très pratique car elle permet de construire ce qu'on appelle le « Triangle de Pascal » :



Chaque ligne peut être construite à partir de la ligne du dessus en sommant les deux éléments qui se trouve juste au dessus de lui. Par exemple

$$\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Exercice. Que vaut $\binom{n}{2}$?

Solution. $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Première preuve : On écrit

$$\begin{aligned}\binom{n}{2} &= \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} \\ &= \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-2}{2} \\ &= \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{1} + \binom{n-3}{2} \\ &= ... \\ &= \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{1} + ... + \binom{2}{1} + \binom{1}{1}\end{aligned}$$

On sait déjà que $\binom{k}{1} = k$ et donc

$$\binom{n}{2} = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Mais il y a aussi une preuve plus directe

Deuxième preuve : « Pour choisir deux termes : on choisit le premier n possibilités. Puis on choisit le deuxième : $(n-1)$ possibilités : » Ce qui donne au total $n \times (n-1)$ possibilité. On a que chaque ensemble est compté 2 fois (par exemple $\{1,3\} = \{3,1\}$). On a alors à la fin

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

ensembles différents.

Il exi

Proposition. *(Formule générale)*

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times (k-2) \times ... \times 2 \times 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemple. $\binom{4}{2} = \frac{4\times 3}{2\times 1} = 6$, $\binom{n}{1} = \frac{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2\times 1} = \frac{n(n-1)}{2}$

Démonstration. « Pour choisir k : terme on choisit le premier : n possibilités. Puis on choisit le deuxième $(n-1)$ possibilités,.., et ainsi de suite jusqu'à choisir le k ème : $(n-k+1)$ possibilité. ». Au total il y a $n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1)$ choix possibles.

Cependant chaque ensemble est compté plusieurs fois : $\{1,3,2\} = \{2,1,3\} = \{3,2,1\} = ...$ Ce nombre est en fait égale au « nombre d'ordre possible pour k éléments » $= k \times (k-1) \times ... \times 1 = k!$ = « nombre de permutations à k éléments » (k possibilités pour le premier, puis $(k-1)$ pour le deuxième ,...).

Conclusion on a alors

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times (k-2) \times ... \times 2 \times 1}.$$

On préfère écrire cette formule en utilisant que

$$\begin{aligned} n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1) &= \frac{n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1) \times ... \times 1}{(n-k) \times (n-k-1) \times ... \times 1} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \end{aligned}$$

□

Exercice. : Calculer $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$

Solution. Sur un collier de n perles :

- $\binom{n}{0}$=« Nombre de manière de colorier 0 perles noires »
- $\binom{n}{1}$=« Nombre de manière de colorier 1 perles noires »
- $\binom{n}{2}$=« Nombre de manière de colorier 2 perles noires »
- ....
- $\binom{n}{n}$=« Nombre de manière de colorier n perles noires »

Et alors

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$ = « Nombre de manière de colorier (comme je veux.) »

Que l'on peut compter de la manière suivante : Pour la première perle il y a 2 possibilités : blanc ou noire, même chose pour la deuxième, etc... Ce qui donne au total $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$. La réponse est donc 2^n.

La formule suivante est extrêmement pratique en algèbre. Vous savez surement que $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ et peut être que $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. On a ici la formule générale

Théorème. *Formule Binome de Newton*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration. Faisons par exemple le cas $n = 3$ on écrit

$$(a+b)(a+b)(a+b) = aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb.$$

En développant on a tous les chaines de a et b possibles de longueur 3. On regroupe alors les termes

$$(a+b)(a+b)(a+b) = (...)a^3 + (...)a^2b + (...)ab^2 + (...)b^3.$$

La question est alors que vaut les termes (...) ? Et bien par exemple pour a^2b c'est le nombre de fois qu'il a fallut choisir un b parmi les 3 lettres soit $\binom{3}{1} = 3$.

Pour ab^2 c'est le nombre de fois qu'il a fallut choisir deux b parmi les 3 lettres soit $\binom{3}{2} = 3$. Et on alors

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} ab^2 + \binom{3}{3} b^3$$

Ce raisonnement peut se faire aussi dans le cas générale pour obtenir le Binôme de Newton. $\square$