Cours en ligne février 2021
TD Combinatoire géométrique

Théorème 1 (Théorème de Helly)**.** Soit E une famille finie d'intervalles de la droite réelle, telle que leurs intersections deux à deux est toujours non vide, i.e pour tous $I, J \in E$, $I \cap J \neq \emptyset$. Montrer qu'il existe un point x appartenant à tous les éléments de E.

Exercice 1 Un ensemble fini E de points du plan a la propriété que pour tous $x, y, z \in E$ il existe un disque contenant ces trois points. Montrer qu'il existe un disque de rayon 1 qui contient tous les points.

Exercice 2 Soit E un ensemble de n points du plan. Montrer qu'il existe un point P du plan tel que toute droite d partant de P, les deux demi-plans définis par d contiennent au moins $\frac{n}{3}$ points.

Exercice 3 Dans le plan se trouvent $4n$ points, en position générale, i.e trois d'entre eux ne sont jamais alignés. Montrer qu'il existe deux droites ne passant par aucun point de ces points qui séparent cet ensemble de points en quatre ensembles de taille exactement n.

Exercice 4 Soit E un ensemble fini de points du plan en position générale, i.e trois d'entre eux ne sont jamais alignés. Un moulin est un processus consistant à faire tourner une droite ℓ passant par un pivot P, qui est un point de l'ensemble, dans le sens horaire jusqu'à ce que le droite touche un autre point de l'ensemble, qui devient le nouveau pivot. Montrer qu'il existe une position initiale de la droite telle qu'avec ce processus tous les points aie été pivots à partir d'un certain temps.

Exercice 5 Soit E un ensemble de n disques de rayon 1 dans le plan. Si tout point du plan est contenu dans au plus k disques de E, alors chaque disque intersecte au maximum $7k - 1$ autres disques de E.

Exercice 6 Dans le plan sont placés n disques de rayon 1. Leur union a une aire de S. Montrer qu'il est possible de supprimer certain disques de sorte que les disques restant soient tous disjoint et leur aire totale soit de $\frac{2S}{9}$.

Exercice 7 Dans le plan se trouvent 100 points, de sorte que chaque triangle entre 3 de ces poins a une aire inférieure à 2021. Montrer qu'il existe une droite qui passe à distance au plus 1 de trois de ces points.

Exercice 8 Un ensemble $\mathcal{S}$ de points du plan est dit équilibré si pour toute paire de points A, B dans $\mathcal{S}$ il existe un point C tel que $AC = BC$. On dit qu'il est sans centre si pour tout triplet de points A, B, C il n'existe pas de point D tel que $AD = BD = CD$.

(a) Montre que pour tout entier $n \geq 3$ il existe un ensemble équilibré d'au moins n points.

(b) Déterminer tous les entiers $n \geq 3$ pour lesquels il existe un ensemble sans centre équilibré de taille n.

Exercice 9 Soit T un triangle équilatéral. Soit S un ensemble de points du plan tels que n'importe quel sous ensemble E de 9 points de S peut être inclus dans l'intérieur de deux translatés de T. Montrer que S est inclus dans l'intérieur de deux translatés de T.

Exercice 10

Soit n un entier, on note $E(n)$ le plus grand entier d tel qu'il existe une configuration C de n points distincts dans le plan tels qu'il y a au plus d distances distinctes entre des points de C.

— Montrer que $E(n) \geq c\sqrt{n}$ pour un certain $c > 0$, pour n assez grand.

— Montrer que $E(n) \geq cn^{\frac{2}{3}}$ pour un certain $c > 0$, pour n assez grand. (Difficile)

Exercice 11 Soit ABC un triangle. On suppose que tous les points du plan sont colorés en rouge ou vert. Montrer que soit il existe un triangle isométrique avec ABC dont les trois sommets sont verts, soit il existe deux points rouges à distance 1 l'un de l'autre.

Exercice 12 Un rectangle est partitionné en 2021 rectangles dont les côtés sont parrallèles aux côtés du rectangle initial. On appelle sommet un point qui est le sommet d'au moins un des 2021 rectangles ou du rectangle inital. On appelle segment élémentaire un segment qui est inclus dans un des côtés de l'un des rectangles de la partition qui rejoint deux sommets, mais qui ne contient aucun sommet autre sommet. Quelles sont les valeurs maximales et minimales que peuvent prendre le nombre de segment élémentaires S ?