PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 4 : COMBINATOIRE

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 27 FÉVRIER 2021

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2006 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. La classe d'Aline contient trente élèves, tous de tailles différentes. Pour la photo de classe, afin que tout le monde soit bien visible, il faut que les dix plus petits élèves de la classe soient placés au premier rang et les dix grands élèves soient placés au dernier rang (les dix élèves restants sont donc au milieu). Combien y a-t-il de façon de répartir les élèves sur les trente places disponibles en respectant ces conditions ?

Exercice 2. 50 pièces sont disposées en ligne droite. Chaque pièce possède une face noire et une face blanche. Au départ, les faces apparentes des pièces sont toutes noires. Une opération consiste à retourner (et donc changer la couleur de la face apparente) deux pièces voisines. Est-il possible qu'après un nombre fini d'opérations, il y ait exactement 25 pièces dont la face apparente est blanche ?

Exercice 3. 42 élèves sont placés en ligne. Paul donne à chaque élève un certain nombre strictement positif de cailloux. On suppose que chaque élève a strictement plus de cailloux que son voisin de droite (sauf l'élève tout à droite de la file). Combien de cailloux Paul a-t-il distribué en tout, au minimum ?

Exercice 4. On colorie les sommets d'un $100-$gone régulier avec 10 couleurs. Montrer qu'il y a 4 sommets qui forment un rectangle et qui sont coloriés avec au plus 2 couleurs.

Exercice 5. Soit n un entier impair et $x_1, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts. Montrer qu'on peut répartir les nombres de l'ensemble $\{|x_i - x_j|, i < j\}$ dans deux sous-ensembles disjoints A et B de telle sorte que la somme des éléments de A soit égale à la somme des éléments de B.

Exercice 6. Soit $n \geqslant 3$ un entier. On place n points sur un cercle. Chacun à leur tour, Noémie et Paul doivent tracer un triangle dont les sommets sont parmi les points qui ne sont pas les sommets d'un triangle déjà tracé et dont les côtés ne coupent pas les côtés des triangles déjà tracés. Le premier joueur à ne plus pouvoir jouer a perdu. Si Noémie commence, lequel des deux joueurs dispose d'une stratégie gagnante ?

Exercice 7. On considère $2n$ entiers strictement positifs. Un *couplage* est une répartition de ces entiers en n paires d'entiers deux à deux disjointes. Par exemple, $\{(1,3),(5,7)\}$ est un couplage des entiers $1,3,5,7$. En revanche, $\{(1,3),(3,7)\}$ n'est pas un couplage des entiers $1,3,5,7$. Un couplage est dit *sans carré* si le produit des deux nombres dans chaque paire n'est jamais un carré parfait. Montrer que s'il existe un couplage sans carré, il en existe au moins $n!$.

Exercice 8. La ville de Metropolis compte n rues, qui sont toutes des lignes droites. Chaque paire de rue a un point d'intersection, et trois rues ne sont jamais concourantes. Le conseil municipal souhaite, à chaque intersection, décider quelle rue aura la priorité sur l'autre. Cependant, afin d'éviter les excès de vitesse, le conseil souhaite qu'une même rue ne soit jamais prioritaire à deux intersections consécutives. Démontrer que ce souhait est réalisable.

Exercice 9. Soit n un entier strictement positif. Des dominos (de taille 1×2) sont disposés sur un échiquier de taille $2n \times 2n$ de façon à ce que chaque case de l'échiquier soit adjacente à exactement une case couverte par un domino (les diagonales ne comptent pas). Pour tout n, déterminer le nombre maximal de dominos qui peuvent être disposés de cette manière.

Exercices Seniors

Exercice 10. Un hôpital vient de recevoir une cargaison de vaccins devant être conservés à température très basse dans des frigos spéciaux. Ils ont reçus 300 flacons. Sachant que chacun des 5 frigos spéciaux de l'hôpital peut contenir plus de 300 flacons (la campagne vaccinale vient à peine de commencer !) et que tous les flacons sont identiques et interchangeables, de combien de façons peut-on répartir les flacons dans les frigos ?

Exercice 11. On colorie les sommets d'un $100-$gone régulier avec 10 couleurs. Montrer qu'il y a 4 sommets qui forment un rectangle et qui sont coloriés avec au plus 2 couleurs.

Exercice 12. Un cercle de diamètre $2n-1$ est tracé au centre d'un échiquier $2n \times 2n$. Combien de cases sont traversées par un arc de cercle ?

Exercice 13. Soit $n \geqslant 3$ un entier. On place n points sur un cercle. Chacun à leur tour, Noémie et Paul doivent tracer un triangle dont les sommets sont parmi les points qui ne sont pas les sommets d'un triangle déjà tracé et dont les côtés ne coupent pas les côtés des triangles déjà tracés. Le premier joueur à ne plus pouvoir jouer a perdu. Si Noémie commence, lequel des deux joueurs dispose d'une stratégie gagnante ?

Exercice 14. On considère $2n$ entiers strictement positifs. Un *couplage* est une répartition de ces entiers en n paires d'entiers deux à deux disjointes. Par exemple, $\{(1,3),(5,7)\}$ est un couplage des entiers $1,3,5,7$. En revanche, $\{(1,3),(3,7)\}$ n'est pas un couplage des entiers $1,3,5,7$. Un couplage est dit *sans carré* si le produit des deux nombres dans chaque paire n'est jamais un carré parfait. Montrer que s'il existe un couplage sans carré, il en existe au moins $n!$.

Exercice 15. Soit k un entier naturel non nul. Soit G un graphe orienté tel qu'aucun sommet n'est relié à lui-même et si u et v sont deux sommets distincts, on ne peut avoir à la fois une arête allant de u vers v et une arête allant de v vers u. Supposons que pour tout k-uplets de sommets $(x_1,\dots,x_k)$ de G, on puisse trouver un sommet u de G tels que pour tout $i=1,\dots,k$, il existe une arête allant de u vers x_i dans G. Montrer que $|G| \geqslant 2^{k+1}-1$.

Exercice 16. Soit n un entier strictement positif. Des dominos (de taille 1×2) sont disposés sur un échiquier de taille $2n \times 2n$ de façon à ce que chaque case de l'échiquier soit adjacente à exactement une case couverte par un domino (les diagonales ne comptent pas). Pour tout n, déterminer le nombre maximal de dominos qui peuvent être disposés de cette manière.

Exercice 17. Deux tétraèdres réguliers sont dits juxtaposés s'ils ont en commun une face. Peut on remplir l'espace en juxtaposant des tétraèdres réguliers ?

Exercice 18. Soit $a_1, a_2, \dots a_n$ des entiers positifs satisfaisant

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leqslant \frac{1}{2}$$

Chaque année, les organisateurs de l'Olympiade Internationale publient un rapport de qualité basé sur n critères. Pour le critère numéro i, le rapport attribue une note qui est un entier compris entre 1 et a_i. Le rapport est dit *optimiste* si au moins $n-1$ des n critères ont une note strictement supérieure à la note qu'ils avaient l'année précédente. Les organisateurs publieront le premier rapport en 2021. Montrer qu'ils peuvent s'arranger pour publier un rapport optimiste chaque année à partir de 2022.