Exercice 1. (F)
Soient a, b des entiers, on suppose que $7|a^2 + b^2$, montrer que $7|a$ et $7|b$.

Exercice 2. (F)
Soit P un polynome à coefficient entiers, montrer que pour tous $a \neq b$ entiers, on a $a - b|P(a) - P(b)$

Exercice 3. (F-M)
Soit $n \geq 5$ un entier. On suppose que l'on a a, b des entiers tels que $n = ab$ avec $1 < a < b < n$ alors montrer que $2n|1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n-1) = (n-1)!$

Exercice 4. (M)
1) Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0$ un polynôme tel que $a_i \in \mathbb{Z}$. On suppose que q est un nombre rationnel vérifiant $P(q) = 0$. Montrer que q est entier.
2) Soient n et d des entiers, montrer que soit $n^{\frac{1}{d}}$ est irrationnel, soit il est entier.

Exercice 5. (M-D)
Trouver les nombres premiers p pour lesquels il existe des entiers $x, y > 0$ tels que $x(y^2 - p) + y(x^2 - p) = 5p$

Exercice 6. (M)
$a, b > 0$ des entiers premiers entre eux. Soit $S = \{ax + by|(x, y) \in \mathbb{N}^2\}$. Montrer qu'il existe un entiers N tel que si $k \geq N$ alors on a $k \in S$.

Exercice 7. (F-M)
On va montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.
1) Montrer que tout entier $a > 1$ est divisible par au moins un nombre premier.
2) En supposant qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers $p_1, ..., p_N$ et on posant $M = p_1p_2...p_N + 1$, aboutir à une contradiction.