Ordre, petit Fermat

Exercice 1 (Théorème de Wilson) Soit p un nombre premier. Montrer que :

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ premier avec 10. Montrer qu'il existe un multiple de n qui ne s'écrit qu'avec des 1.

Exercice 3 Soit p un nombre premier. Montrer qu'il existe n tel que p divise :

$$2^n + 3^n + 6^n - 1$$

Exercice 4 Soit p un nombre premier, y un entier. Montrer qu'il existe un entier x strictement positif tel que $x^x \equiv y \pmod{p}$

Exercice 5 Trouver tous les nombres premiers p tels qu'il existe x, y, z des entiers strictement positifs tels que $x^p + y^p + z^p - x - y - z$ est produit de trois facteurs premiers distincts.

Exercice 6 Montrer que 13 divise $5^{60} - 3^{48}$

Exercice 7 Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, 5 divise $2^{3n+5} + 3^{n+1}$

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ impair. Montrer que $n | 2^{n!} - 1$.

Exercice 9 Soient p, q deux nombres premiers, x un entier tel que q divise $x^{p-1} + ... + x + 1$. Montrer que $q \equiv 1 \pmod{p}$ ou $q = p$.

Exercice 10 Trouver tous les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que n divise $2^n - 1$.

Exercice 11 Soit $n_1, \ldots, n_k$ des entiers strictement positifs tels que $n_1 | 2^{n_2} - 1$, $n_2 | 2^{n_1} - 1, n_3 | 2^{n_2} - 1, \cdots, n_k | 2^{n_{k-1}} - 1$, montrer que $n_1 = \cdots = n_k = 1$.

Exercice 12 Soit n un entier positif tel que n divise $2^n + 1$. Montrer que 3 divise n.

Exercice 13 Soit n et b deux entiers naturels non nuls. Soit p un nombre premier impair divisant $b^{2^n} + 1$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2^{n+1}m + 1$.

Exercice 14 Trouver tous les $n \in \mathbb{N}^*$ impairs tels que n divise $3^n + 1$.

Exercice 15 Trouver tous les entiers positifs (m, n) tels que mn divise $3^n + 1$ et $3^m + 1$.

Exercice 16 Trouver tous les couples d'entiers (a, n) tels que n divise $(a+1)^n - a^n$.

Exercice 17 Trouver tous les couples d'entiers (n, p) avec p premier, $0 < n \leqslant 2p$ et :

$$n^{p-1} | (p-1)^n + 1$$

Exercice 18 Soit p un nombre premier. Montrer que $p^p - 1$ a un diviseur congru à 1 modulo p.

Exercice 19 Soit p un nombre premier, n un nombre strictement positif et q un diviseur strictement positif de $(n+1)^p - n^p$. Montrer que $q \equiv 1 \pmod{p}$

Exercice 20 Trouver tous les nombres p premiers tels que $2^p + p$ divise $3^p + p$

Exercice 21 Trouver tous les triplets (p, q, r) de nombres premiers tels que $pqr | (7^p - 3^p)(7^q - 3^q)(7^r - 3^r)$

Exercice 22 Trouver tous les paires (p, q) de nombres premiers telles que pq divise $5^p + 5^q$.

Exercice 23 Soit p un nombre premier impair, h un entier vérifiant $1 < h < p$. On pose $n = h \times p^e + 1$ avec $e \in \{1, 2\}$ et on suppose que :

$$\begin{cases} n \mid 2^{n-1} - 1 \\ n \nmid 2^h - 1 \end{cases}$$

Montrer que n est premier.