Congruences

- Définition 3: m est un entier naturel non nul. Dire que deux entiers relatifs a et b sont **congrus modulo m** ($a \equiv b$ [m]) signifie qu'ils ont le même reste dans la division euclidienne par m.
- Exemples:
  - $11 \equiv 5$ [3] car $11=3 \times 3 + 2$ et $5 = 3 + 2$
  - $-4 \equiv 2$ [3]

Congruences

- Théorème 2: m est un entier naturel non nul. Pour tous entier relatifs a et b,

$$a \equiv b\ [m] \text{ ssi } m \mid a-b$$

Congruences

- Preuve:
- Si $a \equiv b\ [m]$, alors a et b ont le même reste dans la division par m: $a=mq+r$ et $b=mq'+r$. Par soustraction, $a-b=m(q-q')$ avec $q-q'$ entier, donc $m|a-b$.
- Réciproquement, si $m|a-b$, alors il existe un entier k tel que $a-b=km$, d'où $a=b+km$. La division de a par m se traduit par $a=mq+r$ et $0 \leq r < m$. Ainsi $b+km=mq+r$ donc $b=m(q-k)+r$ avec $q-k$ entier et $0 \leq r < m$. On en déduit que r est aussi le reste de la division euclidienne de b par m, soit $a \equiv b\ [m]$.

Congruences

- Remarques:
- Si r est le reste de la division euclidienne par m, alors $a \equiv r\ [m]$
- $a \equiv 0\ [m]$ ssi $m | a$

Congruences

- Proposition 5: m est un entier naturel non nul. Pour tous entiers relatifs a, b et c, si $a \equiv b\ [m]$ et $b \equiv c\ [m]$, alors $a \equiv c\ [m]$
- Preuve: En effet, dans la division par m, si a et b ont le même reste, ainsi que b et c, alors il en est de même de a et c. D'où le résultat.

Congruences

- Théorème 3: m est un entier naturel non nul et a, b, a’, b’ sont des entiers relatifs. Si $a \equiv b[m]$ et $a' \equiv b'\ [m]$, alors:

$$a+a' \equiv b+b'\ [m]$$

$$a-a' \equiv b-b'\ [m]$$

$$aa' \equiv bb'\ [m]$$

Congruences

- Preuve: Si $a \equiv b\ [m]$ et $a' \equiv b'\ [m]$, alors $a-b = km$ et $a'-b'=k'm$. Par addition, $(a+a')-(b+b')=(k+k')m$ avec $k+k'$ entier donc m divise la différence $(a+a')-(b+b')$, on en déduit $a+a' \equiv b+b'\ [m]$.
- On procède de la même façon pour les deux autres points et l'on trouve respectivement $k+k'$ entier et kk' entier.

Bien maîtriser la congruence

Exercice 22:

Déterminer les entiers naturels n tels que n^2-2n soit divisible par 7.

Bien maîtriser la congruence

Exercice 22:

Déterminer les entiers naturels n tels que n^2-2n soit divisible par 7.

22 Dressons un tableau des restes dans la congruence modulo 7.

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6
$n^2 \equiv$	0	1	4	2	2	4	1
$2n^2 \equiv$	0	2	4	6	1	3	5
$n^2 - 2n \equiv$	0	6	0	3	1	1	3

On déduit que $n^2 - 2n$ est divisible par 7 si, et seulement si :

$$n \equiv 0 \pmod 7 \text{ ou } n \equiv 2 \pmod 7.$$

Il en résulte que $n^2 - 2n$ est divisible par 7 si, et seulement si :

$$n = 7k \text{ ou } n = 7k + 2, \text{ avec } k \text{ entier naturel.}$$

Bien maîtriser la congruence

Exercice 23:

Déterminer les entiers naturels n tels que $n^3+2\mathrm{n}-1$ soit divisible par 5.

Bien maîtriser la congruence

Exercice 23:

Déterminer les entiers naturels n tels que $n^3+2\mathrm{n}-1$ soit divisible par 5.

23 Dressons un tableau des restes dans la congruence modulo 5.

$n \equiv$	0	1	2	3	4
$n^3 \equiv$	0	1	3	2	4
$2n^2-1 \equiv$	4	1	2	2	1
$n^3+2n^2-1 \equiv$	4	2	0	4	0

On déduit que n^3+2n^2-1 est divisible par 5 si, et seulement si : $n \equiv 2 \pmod 5$ ou $n \equiv 4 \pmod 5$.

Il en résulte que n^3+2n^2-1 est divisible par 5 si, et seulement si :

$$n = 5k+2 \text{ ou } n = 5k+4, \text{ avec } k \text{ entier naturel.}$$

Bien maîtriser la congruence

Exercice 24: Quel est l'ensemble des entiers n tels que $3n \equiv 7\ [11]$?

Bien maîtriser la congruence

Exercice 24: Quel est l'ensemble des entiers n tels que $3n \equiv 7$ [11] ?

24 Dressons un tableau des restes dans la congruence modulo 11.

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$3n \equiv$	0	3	6	9	1	4	7	10	2	5	8

On déduit que $3n \equiv 7 \pmod{11}$ équivaut à $n \equiv 6 \pmod{11}$.

L'ensemble $\mathscr{E}$ est constitué des entiers naturels n tels que :

$$n = 11k + 6, \text{ avec } k \text{ entier naturel.}$$

Bien maîtriser la congruence

Exercice 25:

Démontrer que

quel que soit

l'entier naturel n,

$n(2n+1)(n+1)$ est

divisible par 6

Bien maîtriser la congruence

Exercice 25:

Démontrer que quel que soit l'entier naturel n, n(2n+1)(n+1) est divisible par 6

25 Dressons un tableau des restes dans la congruence modulo 6.

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5
$2n+1 \equiv$	1	3	5	1	3	5
$n+1 \equiv$	1	2	3	4	5	0
$n(2n+1)(n+1) \equiv$	0	0	0	0	0	0

On déduit que pour tout entier naturel n, $n(2n+1)(n+1)$ est divisible par 6.

Bien maîtriser la congruence

Exercice 26: a et b sont deux entiers naturels tels que
$a \equiv 5\ [7]$ et $b \equiv 3\ [7]$.
Déterminez les restes de la division euclidienne par 7 de

a) $2a+5b$

b) a^2+11b

c) a^2+3b^2

Bien maîtriser la congruence

Exercice 26: a et b sont deux entiers naturels tels que
$a \equiv 5$ [7] et $b \equiv 3$ [7].
Déterminez les restes de la division euclidienne par 7 de

a) $2a+5b$

b) a^2+11b

c) a^2+3b^2

26 **a)** $a \equiv 5 \pmod 7$ et $b \equiv 3 \pmod 7$; donc :

$$2a + 5b \equiv 25 \pmod 7\text{, soit } 2a + 5b \equiv 4 \pmod 7.$$

Ainsi, le reste de la division euclidienne de $2a + 5b$ par 7 est 4.

b) $a^2 + 11b \equiv 2 \pmod 7$. Le reste de la division euclidienne de $a^2 + 11b$ par 7 est égal à 2.

c) $a^2 + 3b^2 \equiv 3 \pmod 7$.

Le reste de la division euclidienne de $a^2 + 3b^2$ par 7 est égal à 3.

Bien maîtriser la congruence

Exercice 27: a) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{943} par 7 ?

b) Quel est le reste de la division euclidienne de 247^{349} par 7 ?

Bien maîtriser la congruence

Exercice 27: a) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{943} par 7 ?

b) Quel est le reste de la division euclidienne de 247^{349} par 7 ?

27 **a)** $6^2 \equiv 1 \pmod 7$ et $943 = 2 \times 471 + 1$, donc :

$$(6^2)^{471} \times 6 \equiv 6 \pmod 7\text{, soit } 6^{943} \equiv 6 \pmod 7.$$

Le reste de la division euclidienne de 6^{943} par 7 est égal à 6.

b) $247 \equiv 2 \pmod 7$, donc $247^{349} \equiv 2^{349} \pmod 7$.

$2^2 \equiv 4 \pmod 7$; $2^3 \equiv 1 \pmod 7$ donc :

$$(2^3)^{116} \times 2 \equiv 2 \pmod 7\text{, soit } 2^{349} \equiv 2 \pmod 7.$$

Comme $247^{349} \equiv 2^{349} \pmod 7$, alors :

$$247^{349} \equiv 2 \pmod 7.$$

Le reste de la division euclidienne de 247^{349} par 7 est égal à 2.

Bien maîtriser la congruence

Exercice 28:

Démontrez que

$2^{4n+1}+3^{4n+1}$

est divisible par

5 pour tout

entier naturel n.

Bien maîtriser la congruence

Exercice 28:

Démontrez que $2^{4n+1} + 3^{4n+1}$ est divisible par 5 pour tout entier naturel n.

28 $2^4 \equiv 1 \pmod 5$, donc :

$$(2^4)^n \times 2 \equiv 2 \pmod 5, \text{ soit } 2^{4n+1} \equiv 2 \pmod 5.$$

D'autre part, $3^4 \equiv 1 \pmod 5$, donc :

$$(3^4)^n \times 3 \equiv 3 \pmod 5, \text{ soit } 3^{4n+1} \equiv 3 \pmod 5.$$

On déduit que :

$$2^{4n+1} + 3^{4n+1} \equiv 2 + 3 \pmod 5,$$

soit $2^{4n+1} + 3^{4n+1} \equiv 0 \pmod 5$.

Cela veut dire que, pour tout entier naturel n, $2^{4n+1} + 3^{4n+1}$ est divisible par 5.

Bien maîtriser la congruence

Exercice 29: 1) Démontrez que pour tout entier naturel le reste de la division euclidienne par 13 de 3^{3n} est 1.

2) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1$ est un multiple de 13

Bien maîtriser la congruence

Exercice 29: 1) Démontrez que pour tout entier naturel le reste de la division euclidienne par 13 de 3^{3n} est 1.

2) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1$ est un multiple de 13

29 **1.** $3^3 = 27 = 13 \times 2 + 1$, donc :

$$3^3 \equiv 1 \pmod{13}.$$

On déduit que, pour tout entier naturel, n $(3)^n \equiv 1 \pmod{13}$, ce qui s'écrit $3^{3n} \equiv 1 \pmod{13}$.

2. D'après **1.**, $(3^{3n})^2 \equiv 1 \pmod{13}$, soit $3^{6n} \equiv 1 \pmod{13}$.

On déduit que :

$$3^{6n} \times 3^2 + 3^{3n} \times 3 + 1 \equiv 3^2 + 3 + 1 \pmod{13},$$

ce qui s'écrit $3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1 \equiv 0 \pmod{13}$.

Il en résulte que, pour tout entier naturel n, $3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1$ est divisible par 13.

Bien maîtriser la congruence

Exercice 30: n désigne un entier naturel

1) Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de 3^n par 11 ?

2)Déduisez-en que

$3^n + 7 \equiv 0\ [11]$ ssi n=5k+4 avec k entier naturel.

Bien maîtriser la congruence

Exercice 30: n désigne un entier naturel

1) Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de 3^n par 11 ?

2)Déduisez-en que

$3^n + 7 \equiv 0$ [11] ssi n=5k+4 avec k entier naturel.

30 **1.** $3^2 \equiv 9 \pmod{11}$; $3^3 \equiv 5 \pmod{11}$;

$$3^4 \equiv 4 \pmod{11} ; 3^5 \equiv 1 \pmod{11} ;$$

donc, pour tout entier naturel k :

$$(3^5)^k \equiv 1^k \pmod{11}, \text{ soit } 3^{5k} \equiv 1 \pmod{11}.$$

On déduit que :

$3^{5k+1} \equiv 3 \pmod{11}$; $3^{5k+2} \equiv 9 \pmod{11}$;

$3^{5k+3} \equiv 5 \pmod{11}$; $3^{5k+4} \equiv 4 \pmod{11}$.

Comme le reste de la division euclidienne de tout entier naturel n par 5 est 0, 1, 2, 3 ou 4, alors tout entier naturel n s'écrit sous la forme :

$$5k,\ 5k+1,\ 5k+2,\ 5k+3 \text{ ou } 5k+4.$$

On déduit, de ce qui précède, que les restes possibles de la division euclidienne de 3^n par 11 sont :

$$1, 3, 4, 5 \text{ et } 9.$$

2. $3^n + 7 \equiv 0 \pmod{11}$ s'écrit :

$$3^n \equiv -7 \pmod{11}$$

ou encore :

$$3^n \equiv 4 \pmod{11},$$

ce qui équivaut, d'après la question précédente, à $n = 5k + 4$, avec k entier naturel.

Bien maîtriser la congruence

Exercice 31:

Quels sont les entiers naturels n pour lesquels $2^n - 1$ est divisible par 9?

Bien maîtriser la congruence

Exercice 31: Quels sont les entiers naturels n pour lesquels $2^n - 1$ est divisible par 9?

31 $2^n - 1$ est divisible par 9 si, et seulement si, $2^n \equiv 1 \pmod 9$. Cherchons les restes possibles de la division euclidienne de 2^n par 9.

$2^2 \equiv 4 \pmod 9$; $2^3 \equiv 8 \pmod 9$;
$2^4 \equiv 7 \pmod 9$; $2^5 \equiv 5 \pmod 9$;
$2^6 \equiv 1 \pmod 9$;

donc, pour tout entier naturel k :

$(2^6)^k \equiv 1 \pmod 9$, ce qui s'écrit $2^{6k} \equiv 1 \pmod 9$.

On déduit que :

$2^{6k+1} \equiv 2 \pmod 9$; $2^{6k+2} \equiv 4 \pmod 9$;
$2^{6k+3} \equiv 8 \pmod 9$; $2^{6k+4} \equiv 7 \pmod 9$;
$2^{6k+5} \equiv 7 \pmod 9$.

Comme tout entier naturel n s'écrit sous la forme $6k$, $6k+1$, $6k+2$, $6k+3$, $6k+4$ ou $6k+5$ alors les restes possibles de la division euclidienne de 2^n par 9 sont 1, 2, 4, 5, 7 et 8.

Bien maîtriser la congruence

Exercice 32: a) étudiez les carrés modulo 5.

b) Déduisez-en que l'équation $x^2-5y^2=3$, avec x et y des entiers naturels n'a pas de solution.

Bien maîtriser la congruence

Exercice 32: a) étudiez les carrés modulo 5.

b) Déduisez-en que l'équation $x^2-5y^2=3$, avec x et y des entiers naturels n'a pas de solution.

32 **a)** Dressons un tableau des restes dans la congruence modulo 5.

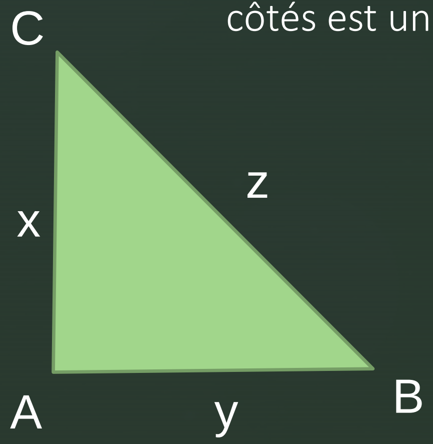
$n \equiv$	0	1	2	3	4
$n^2 \equiv$	0	1	4	4	1

b) • L'équation $x^2 - 5y^2 = 3$ implique $x^2 \equiv 3 \pmod 5$. Or, les restes possibles dans la division euclidienne du carré d'un entier par 5 sont 0, 1 et 4. On en déduit que l'équation donnée n'a pas de solution.

Exercices complémentaires

Exercice: Les entiers naturels non nuls x, y, z sont les mesures des côtés d'un triangle ABC.

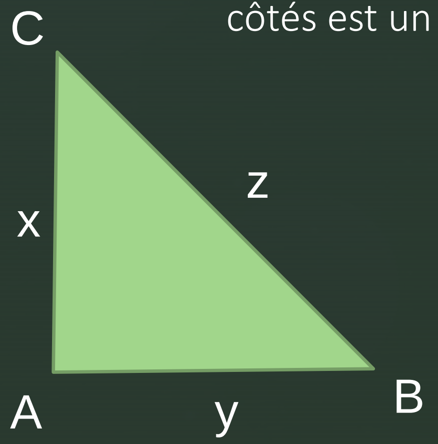
Démontrer que si le triangle est rectangle en A, alors l'une au moins des mesures des côtés est un multiple de 5.



Exercices complémentaires

Exercice: Les entiers naturels non nuls x, y, z sont les mesures des côtés d’un triangle ABC.

Démontrer que si le triangle est rectangle en A, alors l’une au moins des mesures des côtés est un multiple de 5.



Le triangle ABC est rectangle en A si, et seulement si, $x^2 + y^2 = z^2$.

Dressons un tableau des restes dans la congruence modulo 5.

$z \equiv$	0	1	2	3	4
$z^2 \equiv$	0	1	4	4	1

Dressons un tableau des restes de la somme $x^2 + y^2$ dans la congruence modulo 5.

y^2 \ x^2	0	1	4
0	0	1	4
1	1	2	0
4	4	0	3

• L’égalité $x^2 + y^2 = z^2$ implique la congruence $x^2 + y^2 \equiv z^2$ (mod 5). Cette congruence est possible uniquement si $x^2 + y^2$ prend les valeurs prises par z^2, soit 0, 1 ou 4.

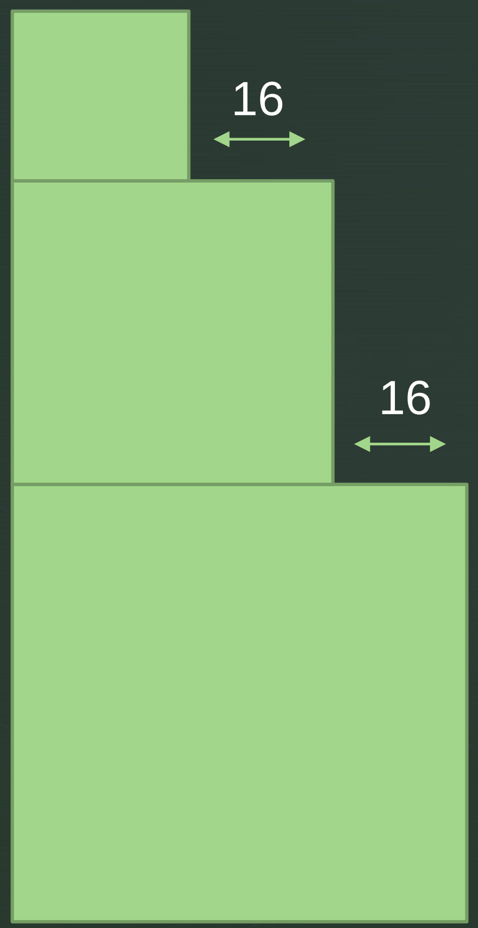
• $x^2 + y^2$ prend les valeurs 1 et 4 uniquement lorsque $x^2 \equiv 0$ (mod 5) ou $y^2 \equiv 0$ (mod 5), ce qui équivaut à $x \equiv 0$ (mod 5) ou $y \equiv 0$ (mod 5).

• Lorsque $x^2 + y^2 \equiv 0$ (mod 5) et $x^2 + y^2 \equiv z^2$ (mod 5), cela implique que $z^2 \equiv 0$ (mod 5), d’où $z \equiv 0$ (mod 5).

• En conclusion, l’égalité $x^2 + y^2 = z^2$ implique que $x \equiv 0$ (mod 5) ou $y \equiv 0$ (mod 5) ou $z \equiv 0$ (mod 5). Cela veut dire que si $x^2 + y^2 = z^2$ alors l’un au moins des entiers x, y ou z est divisible par 5.

Exercices complémentaires

Exercice: La figure ci-contre est formée de trois carrés. L’unité de mesure est le cm et les mesures des côtés des carrés sont des entiers naturels. Quelles sont les mesures des côtés des carrés sachant que l’air de la figure est un multiple de 10 inférieur à 500



Soit n la longueur du côté du plus petit carré. Ainsi, l'aire de la figure est :

$$A(n) = n^2 + (n+16)^2 + (n+32)^2,$$

soit $A(n) = 3n^2 + 96n + 1280$.

Comme :

$$96 \equiv -4 \pmod{10} \text{ et } 1280 \equiv 0 \pmod{10},$$

alors $A(n) \equiv 3n^2 - 4n \pmod{10}$.

Dressons un tableau des restes dans la congruence modulo 10.

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$3n^2 - 4n \equiv$	0	9	4	5	2	5	4	9	0	7

On déduit que l'aire $A(n)$ est multiple de 10 si, et seulement si : $n \equiv 0 \pmod{10}$ ou $n \equiv 8 \pmod{10}$.

D'autre part, $A(n) \leqslant 5000$ se traduit par :

$$3n^2 + 96n + 1280 \leqslant 5000, \text{ soit } n^2 + 32n \leqslant 1240.$$

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = x^2 + 32x.$$

• À l'aide d'un tableau de valeurs de f, cherchons les images des nombres qui s'écrivent sous la forme $10k$, k étant un entier naturel non nul :

$$f(10) = 420 \,;\, f(20) = 1\,040 \,;\, f(30) = 1\,860.$$

Les images ne dépassant pas 1 240 correspondent à $n = 10$ et $n = 20$.

• Cherchons maintenant les images des nombres qui s'écrivent sous la forme $10k + 8$, k étant un entier naturel non nul :

$$f(8) = 320 \,;\, f(18) = 900 \,;\, f(28) = 1680.$$

Les images ne dépassant pas 1240 correspondent à $n = 8$ et $n = 18$.

• Les entiers n solutions du problème sont 8, 10, 18 et 20.

• Si $n = 8$, les longueurs des côtés des trois carrés sont 8 cm, 24 cm et 40 cm. L'aire de la figure est 2 240 cm^2.

• Si $n = 10$, les longueurs des côtés des trois carrés sont 10 cm, 26 cm et 42 cm. L'aire de la figure est 2 540 cm^2.

• Si $n = 18$, les longueurs des côtés des trois carrés sont 18 cm, 34 cm et 50 cm. L'aire de la figure est 3 980 cm^2.

• Si $n = 20$, les longueurs des côtés des trois carrés sont 20 cm, 36 cm et 52 cm. L'aire de la figure est 4 400 cm^2.