Paul Boureau

# Groupe B : congruences

# Rappels de divisibilité

- Définition 1: a et b sont deux entiers relatifs ($b \neq 0$). Dire que b **divise** a signifie qu'il existe un entier k tel que $a=bk$
- Proposition 1:
- 1) si b divise a, alors –b divise a
- 2) si $b \mid a$ et $a \neq 0$, alors $|b| \leq |a|$.

# Rappels de divisibilité

- Définition 1: a et b sont deux entiers relatifs ($b \neq 0$). Dire que b **divise** a signifie qu'il existe un entier k tel que $a=bk$
- Proposition 1:
- 1) si b divise a, alors $-b$ divise a
- 2) si $b \mid a$ et $a \neq 0$, alors $|b| \leq |a|$.
- Preuve: $a=bk$ implique $|a|=|b||k|$. Or $a \neq 0$, donc $k \neq 0$ ; ainsi l'entier positif $|k|$ est tel que $|k| \geq 1$. On déduit alors que $|b| \leq |a|$.

# Rappels de divisibilité

- Proposition 2: a et b sont deux entiers relatifs non nuls. Si $a|b$ et $b|a$, alors $a = b$ ou $a = -b$.

- [illegible] D'après la proposition 1, $|a|=|b|$ [illegible] Ainsi $a = b$ ou $a = -b$.

- Proposition 3 : $a \neq 0$, $b \neq 0$ et c trois entiers [illegible] $b|c$, alors $a|c$.

- Preuve : Par hypothèse, il existe k tel que $b=ka$ et [illegible] k' tel que $c=bk'$. On en déduit que $c=akk'$ avec kk' entier donc $a|c$.

# Rappels de divisibilité

- Proposition 2: a et b sont deux entiers relatifs non nuls. Si $a|b$ et $b|a$, alors $a = b$ ou $a = -b$.
- Preuve: D'après la proposition 1, $|a|=|b|$ par double inégalité. Ainsi $a = b$ ou $a = -b$.
- Proposition 3 : $a \neq 0$, $b \neq 0$ et c trois entiers [illegible] [illegible] $b|c$, alors $a|c$.
- Preuve : Par hypothèse, il existe k tel que $b=ka$ et [illegible] $k'$ tel que $c=bk'$. On en déduit que $c=akk'$ avec $kk'$ entier donc $a|c$.

## Rappels de divisibilité

- Proposition 2: a et b sont deux entiers relatifs non nuls. Si $a|b$ et $b|a$, alors $a = b$ ou $a = -b$.
- Preuve: D'après la proposition 1, $|a|=|b|$ par double inégalité. Ainsi $a = b$ ou $a = -b$.
- Proposition 3: $a \neq 0$, $b \neq 0$ et c trois entiers relatifs, si $a|b$ et $b|c$, alors $a|c$.
- Preuve : Par hypothèse, il existe k tel que $b=ka$ et un entier $k'$ tel que $c=bk'$. On en déduit que $c=akk'$ avec $kk'$ entier donc $a|c$.

# Rappels de divisibilité

- Proposition 2: a et b sont deux entiers relatifs non nuls. Si $a|b$ et $b|a$, alors $a = b$ ou $a = -b$.
- Preuve: D'après la proposition 1, $|a|=|b|$ par double inégalité. Ainsi $a = b$ ou $a = -b$.
- Proposition 3: $a \neq 0$, $b \neq 0$ et c trois entiers relatifs, si $a|b$ et $b|c$, alors $a|c$.
- Preuve : Par hypothèse, il existe k tel que $b=ka$ et un entier k' tel que $c=bk'$. On en déduit que $c=akk'$ avec kk' entier donc $a|c$.

# Rappels de divisibilité

- Proposition 4: a, b, d sont trois entiers relatifs ($d \neq 0$). Si d divise a et b, alors d divise tout entier $ma + nb$ avec m et n entiers relatifs.

# Division euclidienne

- Théorème 1 (admis mais à savoir faire): a et b sont deux entiers relatifs et b est non nul. Alors il existe un unique couple (q ; r) avec q entier relatif et r entier naturel tel que

$$a = bq+r \text{ et } 0 \leq r < |b|$$

# Bien maîtriser la divisibilité

Exercice 1: $n$ est un entier relatif différent de -2. On pose $a = -2n^2 - 4n + 6$ et $b = n + 2$. Pour quelles valeurs de $n$, $b$ divise-t-il $a$ ?

# Bien maîtriser la divisibilité

Exercice 1: n est un entier relatif différent de -2. On pose a= $-2n^2-4n+6$ et b=n+2. Pour quelles valeurs de n, b divise-t-il a ?

**1** **1.** $-2n(n+2)+6=-2n^2-4n+6$.

**2.** $a=-2nb+6$ équivaut à $a+2nb=6$.

On a $b$ divise $a$ si, et seulement si, $b$ divise $a+2nb$, ce qui équivaut à $b$ divise 6.

On déduit que $b$ divise $a$ si, et seulement si, $b$ est égal à $-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3$ ou $6$.

Dans ce cas, les valeurs de $n$ sont :

$$-8, -5, -4, -3, -1, 0, 1 \text{ ou } 4.$$

# Bien maîtriser la divisibilité

Exercice 2: n est un entier relatif différent de 4. Pour quelles valeurs de n le nombre $\frac{35}{n-4}$ est il un entier ?

# Bien maîtriser la divisibilité

Exercice 2: n est un entier relatif différent de 4. Pour quelles valeurs de n le nombre $\frac{35}{n-4}$ est il un entier

**2** Pour $n$ entier relatif différent de 4, $\frac{35}{n-4}$ est entier si, et seulement si, $n-4$ divise 35.

Les diviseurs de 35 sont :

$$-35, -7, -5, -1, 1, 5, 7 \text{ ou } 35.$$

On déduit que $\frac{35}{n-4}$ est entier si, et seulement si, $n$ est égal à :

$$-31, -3, -1, 3, 5, 9, 11 \text{ ou } 39.$$

# Bien maîtriser la divisibilité

Exercice 3: n est un entier relatif différent de -2. On pose $a=24n+8$ et $b=n+2$. Pour quelles valeurs de n, $b|a$ ?

# Bien maîtriser la divisibilité

Exercice 3: n est un entier relatif différent de -2. On pose a=24n+8 et b=n+2. Pour quelles valeurs de n, b|a ?

**3** $24n + 8 = 24(n + 2) - 40$, donc $a = 24b - 40$.

On déduit que $b$ divise $a$ si, et seulement si, $b$ divise 40.

Ce qui équivaut à $b$ est égal à :

$$-40, -20, -10, -8, -5, -4, -2, -1,$$
$$1, 2, 4, 5, 8, 10, 20 \text{ ou } 40.$$

Autrement dit, $n$ est égal à :

$$-42, -22, -12, -10, -7, -6, -4, -3, -1,$$
$$0, 2, 3, 6, 8, 18 \text{ ou } 38.$$

# Bien maîtriser la divisibilité

Exercice 4: Trouver tous les couples d'entiers naturels $(x;y)$ tels que

$$( x + 2 )( y -3 ) = 15$$

# Bien maîtriser la divisibilité

Exercice 4: Trouver tous les couples d'entiers naturels (x;y) tels que ( x + 2 )( y -3 ) = 15

**4** On a $(x+2)(y-3) = 15$, avec $x$ entier naturel ; donc $x+2 \geqslant 2$ et $y-3>0$.

L'équation est équivalente à :

$$\begin{cases} x+2=3 \\ y-3=5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+2=5 \\ y-3=3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+2=15 \\ y-3=1 \end{cases},$$

soit $\begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=3 \\ y=6 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=13 \\ y=4 \end{cases}$.

# Bien maîtriser la divisibilité

Exercice 5:

Trouver tous les

couples d’entiers

naturels (a;b)

tels que

$a^2-b^2 = 20$

# Bien maîtriser la divisibilité

Exercice 5:

Trouver tous les couples d’entiers naturels (a;b) tels que

$a^2 - b^2 = 20$

**5** $a^2 - b^2 = 20$ équivaut à $(a - b)(a + b) = 20$.

On remarque que $a - b < a + b$, $a - b$ et $a + b$ ont la même parité.

On déduit que l’équation donnée est équivalente à :

$$\begin{cases} a - b = 2 \\ a + b = 10 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} a = 6 \\ b = 4 \end{cases}.$$

# Bien maîtriser la divisibilité

Exercice 6: n est un entier relatif différent de 3. Pour quelles valeurs de n, $\frac{n^2-2n+9}{n-3}$ est-il entier ?

# Bien maîtriser la divisibilité

Exercice 6: n est un entier relatif différent de 3. Pour quelles valeurs de n, $\frac{n^2-2n+9}{n-3}$ est-il entier ?

**6** On a $A = \frac{n^2-2n+9}{n-3} = n+1+\frac{12}{n-3}$ ;

donc A est entier si, et seulement si, $n-3$ divise 12 ; ce qui équivaut à $n$ est égal à :

$-9, -3, -1, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9$ ou $15$.

# Bien maîtriser la divisibilité

Exercice 7: k est un entier naturel. On pose $a=9k+2$ et $b=12k+1$. Démontrer que les seuls diviseurs positifs possibles communs aux entiers a et b sont 1 et 5?

# Bien maîtriser la divisibilité

Exercice 7: k est un entier naturel. On pose a=9k+2 et b=12k+1. Démontrer que les seuls diviseurs positifs possibles communs aux entiers a et b sont 1 et 5?

**7** On pose $a = 9k + 2$ et $b = 12k + 1$. Si un entier positif $d$ divise $a$ et $b$, alors $d$ divise $3a - 3b = 5$ ; donc, les seules valeurs possibles de $d$ sont 1 et 5.

# Bien maîtriser la divisibilité

Exercice 8: n est un entier naturel.

a) démontrer que quel que soit n, $n+2 \mid n^2+3n+2$.

b) En déduire les valeurs de l'entier n pour lesquelles n+2 divise $4n^2+12n+20$

# Bien maîtriser la divisibilité

Exercice 8: n est un entier naturel.

a) démontrer que quel que soit n, $n+2 \mid n^2+3n+2$.

b) En déduire les valeurs de l'entier n pour lesquelles n+2 divise $4n^2+12n+20$

**8** **a)** On a $n^2 + 3n + 2 = (n + 2)(n + 1)$ ; donc, quel que soit l'entier $n$, $n + 2$ divise $n^2 + 3n + 2$.

**b)** On a $4n^2 + 12n + 20 = 4(n^2 + 3n + 2) + 12$.

Comme $n + 2$ divise $n^2 + 3n + 2$, on déduit que $n + 2$ divise $4n^2 + 12n + 20$ si, et seulement si, $n + 2$ divise 12 ; ce qui équivaut à $n$ est égal à :

$$0, 1, 2, 4 \text{ ou } 10.$$

# Bien maîtriser la divisibilité

Exercice 9:

Déterminer les entiers naturels n tels que n-2 divise 3n+12

# Bien maîtriser la divisibilité

Exercice 9:

Déterminer les entiers naturels n tels que n-2 divise 3n+12

**9** $3n + 12 = 3(n - 2) + 18$. On déduit que $n - 2$ divise $3n + 12$ si, et seulement si, $n - 2$ divise 18. Ce qui équivaut à $n$ est égal à :

$$1, 3, 4, 5, 8, 11 \text{ ou } 20.$$

# Bien maîtriser la divisibilité

Exercice 10: $m$ et $n$ sont deux entiers relatifs. On pose $a=10n+m$.

1) Démontrez que si $n-11m$ est divisible par 37, alors $a$ est divisible par 37.

2) La réciproque ?

# Bien maîtriser la divisibilité

Exercice 10: m et n sont deux entiers relatifs. On pose a=10n+m.

1) Démontrez que si n-11m est divisible par 37, alors a est divisible par 37.

2) La réciproque ?

**10** **1.** Si 37 divise $n-11m$, alors 37 divise $10(n-11m)$.

$$\begin{aligned} 10(n-11m) &= 10n - 110m \\ &= 10n + m - 111m \\ &= a - 37 \times 3m \end{aligned}$$

Donc 37 divise $10(n-11m) + 37 \times 3m = a$.

**2.** La réciproque est fausse.

Pour $n = 5$ et $m = 19$, on a $a = 74 = 37 \times 2$ ;

donc $n - 11m = -204$ n'est pas divisible par 37.

# Bien maîtriser la divisibilité

Exercice 11: k est un entier naturel, on pose $a=13k+1$ et $b=4-26k$. Prouvez que les seuls diviseurs positifs communs à a et b sont 1, 2, 3 ou 6.

# Bien maîtriser la divisibilité

Exercice 11: k est un entier naturel, on pose a=13k+1 et b=4-26k. Prouvez que les seuls diviseurs positifs communs à a et b sont 1, 2, 3 ou 6.

**11** $a = 13k + 1$ et $b = 4 - 26k$.

Soit $d$ un diviseur positif commun à $a$ et $b$.

$d$ divise $a$ et $b$, donc il divise $2a + b = 6$. Il en résulte que les valeurs possibles de $d$ sont :

$$1, 2, 3 \text{ ou } 6.$$