Equations diophantiennes

Théo Lenoir

Déjà qu'est-ce qu'une équation diophantienne ? C'est une équation faisant intervenir des entiers. Souvent une équation diophantienne ressemble à ça : $2^x + z^2 = 3^y$ avec (x, y, z) entiers positifs. L'objectif est de trouver toutes les solutions (ou parfois de montrer qu'il y a en a une infinité). Pour cela, deux outils principaux : les factorisations et les modulos.

Quelques techniques :

1. Cela ne sert à rien de regarder une équation diophantienne modulo 6, puisque d'après le théorème des restes chinois, c'est la même chose que de la regarder modulo 2 et modulo 3. Il faut uniquement essayer de regarder modulo une puissance d'un nombre premier.
2. Souvent il est pratique de trouver les solutions (qui sont faciles à trouver car souvent les nombres solutions sont petits), en effet s'il y a une solution (par exemple dans l'équation initiale $(3, 1, 2)$ est solution), il ne peut y avoir de contradiction immédiate en regardant un modulo spécifique sans faire de supposition supplémentaire.
3. On aime avoir des carrés (ou des cubes) pour factoriser (car par exemple $z^2 - x^2 = (z - x)(z + x)$, pour cela si on a une facteur du type a^x, on essaie de regarder l'équation modulo quelque chose qui divise $a + 1$ pour montrer que x est pair, donc que a^x est un carré.
4. Souvent si on a un facteur a^x dans l'équation il est intéressant de regarder modulo un nombre premier qui divise a à une certaine puissance (plus grande que celle présente dans les solutions) : par exemple si on veut résoudre $2^z + 5 = 3^x$, on a une solution pour $z = 2$, $x = 3$, on peut donc regarder modulo 8, si $z \geqslant 3$, on a $3^x \equiv 5 \pmod 8$ ce qui est impossible car 3^x vaut 1 ou 3 modulo 8.
5. Quand on ne sait pas quoi faire, les modulos les plus utiles sont souvent $4, 8, 3$. Quand on ne sait pas quoi faire, ce n'est pas bête de regarder sur tous les modulos intéressants entre 1 et 10, c'est-à-dire $2, 3, 4, 5, 7, 8, 9$.
6. Quand il y a des carrés, regarder modulo 4 ou 8 est souvent très utile. Quand il y a des cubes, regarder modulo 7 ou 9 est souvent utile. De manière plus générale, quand il y a des cubes, il est utile de regarder modulo un nombre premier congru à 1 modulo 3 (par exemple 7 ou 13).
7. Quand il y a un facteur $n!$ dans l'équation, il faut souvent borner n. Souvent on peut prouver facilement que $n!$ ne peut pas être divisible par quelque chose et ceci donne une borne sur n. Il reste à traiter les autres cas à la main.
8. Souvent il est utile de factoriser par le pgcd pour simplifier l'équation. De plus, cela permet parfois d'obtenir une équation concernant des variables premières entre elles, ce qui est plus pratique pour regarder les divisibilités.
9. Parfois, les équations diophantiennes nécessitent des inégalités : quand on a des équations diophantiennes avec x, y, z à certaines puissances, souvent un des deux côtés de l'inégalité est bien trop grand lorsque x, y, z sont assez grands. Pour cela, souvent il est utile d'ordonner x, y, z et de borner chacun d'entre eux.

Exercice 1 Résoudre $x^2 + y^4 + 1 = 6^z$ où (x, y, z) sont des entiers positifs.

Exercice 2 Résoudre $3^x - 2^y = \pm 1$ pour x, y entiers positifs.

Exercice 3 Trouver tous les a, b, c, k avec a, b, c des nombres premiers et k un entier positif tels que $a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1$

Exercice 4 Résoudre pour m, n dans $\mathbb{Z}$ $m^5 - n^5 = 16mn$

Exercice 5 Trouver tous les entiers n strictement positifs tels qu'il existe p premier tel que $p^n - (p - 1)^n$ soit une puissance de 3.

Exercice 6 Existe-t-il a, b entiers positifs et p premier tels que $a^3 - b^3 = 4p^2$?

Exercice 7 Trouver tous les triplets (p, q, r) de nombres premiers tels que $3p^4 - 5q^4 - 4r^2 = 26$

Exercice 8 Déterminer tous les couples (x, n) d'entiers positifs tels que $3 \cdot 2^x + 4 = n^2$.

Exercice 9 Trouver les (p, m, n) avec p premier et m, n des entiers positifs tels que $p^m - n^3 = 27$.

Exercice 10 Résoudre $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 7 \cdot 4^n$.