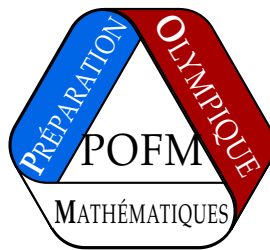


# PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



ENVOI 1 : ALGÈBRE  
À RENVoyer AU PLUS TARD LE 25 DÉCEMBRE 2020

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2006 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

## Exercices Juniors

*Exercice 1.* Soit  $x$  un réel strictement positif. Montrer que  $x^3 + \frac{1}{x} \geq 2x$  et trouver les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 1 Etant donné que  $x$  est un réel strictement positif, il en est de même de  $x^3$  et  $\frac{1}{x}$ . L'inégalité arithmético-géométrique indique alors que

$$x^3 + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x^3}{x}} = 2\sqrt{x^2} = 2x$$

Pour déterminer le cas d'égalité, il faut regarder le cas d'égalité des moyennes. En effet, si l'on a égalité, cela signifie que  $x^3 = \frac{1}{x}$ . On a donc  $x^4 = 1$ , ce qui implique que  $x^2 = 1$  ou  $x^2 = -1$ . Puisque  $x$  est réel,  $x^2 \geq 0$ , on a donc  $x^2 = 1$ . Cela implique que  $x = 1$  ou  $x = -1$ . Puisque  $x$  est positif, on a forcément  $x = 1$ .

Réciproquement, si  $x = 1$ , alors  $x^3 + \frac{1}{x} = 2 = 2x$

Commentaire des correcteurs : L'exercice est largement réussi. Un certain nombre d'élève conserve en revanche  $x = -1$  comme cas d'égalité alors qu'ils utilisent implicitement que  $x > 0$  (précisé dans l'énoncé) pour montrer l'inégalité.

*Exercice 2.* Montrer que pour tous réels  $a, b, c > 0$ , on a

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Trouver les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 2 Comme on a une somme de fractions, on est très tenté d'utiliser l'inégalité des mauvais élèves. On factorise préalablement par 2 :

$$2 \left( \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq 1 = 2 \times \frac{(1+1+1)^3}{a+b+b+c+c+a} = \frac{2 \times 9}{2(a+b+c)} = \frac{9}{a+b+c}.$$

Pour déterminer le cas d'égalité, il faut regarder le cas d'égalité de l'inégalité des mauvais élèves. Celui-ci indique que si l'on a égalité, alors  $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a+c} = \frac{1}{b+c}$ , donc  $a+b = b+c = a+c$ . En particulier, comme  $a+b = b+c$ ,  $a = c$  et comme  $a+b = a+c$ ,  $b = c$ , donc  $a = b = c$ .

Réciproquement si  $a = b = c$ , alors

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} = 3 \times \frac{2}{2a} = \frac{3}{a} = \frac{9}{a+b+c}$$

et on a bien égalité.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est très bien réussi. Une poignée d'élèves parvient à montrer l'inégalité après de longs et fastidieux calculs (heureusement justes), et quelques-uns les commencent sans les aboutir. Une grande partie des élèves ayant abordé le problème trouve tout de même une solution courte via des inégalités classiques.

**Exercice 3.** Soit  $a, b, c, d$  des réels positifs tels que  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$ . Montrer qu'il existe deux réels parmi  $a, b, c, d$  dont la somme vaut au plus 2.

Solution de l'exercice 3 L'énoncé nous donne une hypothèse sur la somme  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  mais nous demande de montrer un résultat sur les nombres  $a, b, c$  et  $d$ . Pour passer des variables  $a^2, b^2, c^2$  et  $d^2$  aux variables  $a, b, c$  et  $d$ , on utilise l'inégalité des moyennes arithmétique et quadratique. Celle-ci indique que

$$\frac{a + b + c + d}{4} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}}$$

On obtient donc que  $a + b + c + d \leq 4$ . En particulier, soit  $a + b \leq 2$ , soit  $a + b \geq 2$ . Si  $a + b \leq 2$ , on a déjà gagné. Dans le cas où  $a + b \geq 2$ , on a que  $c + d \leq 4 - (a + b) \leq 2$  ce qui donne également le résultat voulu.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été très bien réussi. Certains élèves effectuent parfois des développements très longs. Attention également rester suffisamment précis dans sa démonstration et à ne pas aller trop vite, sous peine de perdre des points.

**Exercice 4.** Soit  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs tels que  $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} = 1$ . Montrer que

$$\frac{a}{b^2 + 1} - \frac{b}{a^2 + 1} = a - b.$$

Solution de l'exercice 4 On commence par examiner l'hypothèse donnée et essayant d'exprimer  $b$  en fonction de  $a$ .

On a :

$$\frac{a}{a+1} = 1 - \frac{b}{b+1} = \frac{1}{b+1}$$

Ceci nous permet d'isoler  $b$ . en passant l'équation à l'inverse, on obtient :

$$b + 1 = \frac{a + 1}{a} = 1 + \frac{1}{a}$$

On a donc  $b = \frac{1}{a}$ .

On peut alors calculer l'expression demandée :

$$\frac{a}{b^2 + 1} - \frac{b}{a^2 + 1} = \frac{a}{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + 1} - \frac{1}{a(a^2 + 1)} = \frac{a^3}{a^2 + 1} - \frac{1}{a(a^2 + 1)} = \frac{a^4 - 1}{a(a^2 + 1)}$$

On utilise alors l'identité remarquable  $a^4 - 1 = (a^2 + 1)(a^2 - 1)$ . On a alors :

$$\frac{a}{b^2 + 1} - \frac{b}{a^2 + 1} = \frac{a^4 - 1}{a(a^2 + 1)} = \frac{a^2 - 1}{a} = a - \frac{1}{a} = a - b$$

ce qui donne bien le résultat voulu.

Commentaire des correcteurs : L'exercice testait l'aptitude à effectuer des manipulations algébriques. Cela a été très bien réussi, et la grande majorité d'élèves donne un raisonnement correct. Les élèves qui ne parviennent pas à conclure l'exercice sont souvent bloqués par des erreurs de calculs qui se sont glissées dans les développements et factorisations plus ou moins compliqués.

**Exercice 5.** Soit  $a, b, c$  trois réels strictement positifs, montrer que  $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq \frac{4a}{a+b}$ . Trouver les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 5 On commence par se débarrasser du dénominateur contenant  $a + b$ . Ainsi, il est équivalent de montrer l'inégalité :

$$(a + b) \left( \frac{a}{c} + \frac{c}{b} \right) \geq 4a$$

qui se réécrit, en développant le côté droit :

$$\frac{ab}{c} + \frac{a^2}{c} + \frac{ac}{b} + c \geq 4a$$

Pour minorer une somme de termes, on peut alors appliquer l'inégalité des moyennes arithmétique et géométrique à 4 variables. On a en effet :

$$\frac{ab}{c} + \frac{a^2}{c} + \frac{ac}{b} + c \geq 4 \sqrt[4]{\frac{ab}{c} \cdot \frac{a^2}{c} \cdot \frac{ac}{b} \cdot c} = 4a$$

ce qui correspond à l'inégalité voulue.

Pour trouver le cas d'égalité, on regarde le cas d'égalité de l'inégalité des moyennes. Si on a égalité, il faut donc que  $\frac{ab}{c} = \frac{a^2}{c} = \frac{ac}{b} = c$ . En particulier,  $\frac{a^2}{c} = c$  et  $\frac{ac}{b} = \frac{ab}{c}$ . La première égalité donne  $a^2 = c^2$  donc  $a = c$  car  $a$  et  $c$  sont tous les deux positifs. La deuxième égalité, après suppression des dénominateurs et simplification par  $a$ , donne que  $c^2 = b^2$  donc  $c = b$  car  $b$  et  $c$  sont tous les deux positifs. Ainsi,  $a = b = c > 0$ .

Réciproquement si  $a = b = c > 0$ , on a bien  $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} = 2 = \frac{4a}{a+b}$ . On a donc égalité si et seulement si  $a = b = c$ .

Solution alternative n°1 On propose une seconde solution utilisant cette fois-ci l'inégalité des mauvais élèves. Pour cela, on voudrait avoir un  $a$  et un  $b$  au dénominateur. Le  $b$  étant déjà présent dans l'une des deux fractions, on peut faire apparaître le  $a$  avec le dénominateur de l'autre fraction :

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{b} = \frac{a^2/c}{a} + \frac{c}{b}$$

En utilisant l'inégalité des mauvais élèves, on obtient :

$$\frac{a^2}{a} + \frac{c}{b} \geq \frac{\left( \frac{a}{\sqrt{c}} + \sqrt{c} \right)^2}{a + b}$$

Or, par l'inégalité arithmético-géométrique,  $\frac{a}{\sqrt{c}} + \sqrt{c} \geq 2\sqrt{a}$ , donc

$$\frac{a^2/c}{a} + \frac{c}{b} \geq \frac{(2\sqrt{a})^2}{a + b} = \frac{4a}{a + b}$$

Si on a égalité, alors on a égalité dans chacune des inégalités utilisées. En particulier, on a égalité dans l'inégalité des moyennes appliquée à  $\frac{a}{\sqrt{c}}$  et  $\sqrt{c}$ , si bien que  $\frac{a}{\sqrt{c}} = \sqrt{c}$ . On obtient ainsi que  $a = c$ . On est également dans le cas d'égalité de l'inégalité des mauvais élèves, ce qui nous permet d'affirmer que  $\frac{a^2/c}{a} = \frac{c}{b}$ . Comme  $a = c$ , on en déduit que  $1 = \frac{c}{b}$  donc  $b = c = a$ .

Réciproquement, dans ce cas on a égalité comme prouvé dans la solution : on a donc égalité si et seulement si  $a = b = c$ .

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été bien traité par la majorité des élèves. Attention toutefois au cas d'égalité : il faut prouver ici qu'avoir égalité implique  $a = b = c$ , puis prouver que si  $a = b = c$  on a bien égalité.

**Exercice 6.** Déterminer toutes les suites  $(a_n)_{n \geq 1}$  de réels telles que  $a_i = a_{i+2020}$  pour tout entier  $i \geq 1$ , et telles que

$$a_j + 2a_{j+2} \geq a_{j+1}^2 + a_{j+1} + 1$$

pour tout entier  $j \geq 1$ .

Solution de l'exercice 6 Ici, les termes dans l'inégalité  $a_{j+1}^2$  et 1 semblent un peu pénibles, car ils ne sont pas de degré 1 comme les autres termes de l'inégalité. On aimerait se ramener à une inégalité homogène, c'est-à-dire une inégalité qui reste vraie si l'on multiplie les différents termes par un même facteur  $k$ . On va donc utiliser l'inégalité  $x^2 + 1 \geq 2x$  qui est vraie pour tout réel  $x$ , car  $(x - 1)^2 \geq 0$ . Cette inégalité appliquée à la relation donne

$$a_j + 2a_{j+2} \geq a_{j+1} + a_{j+1}^2 + 1 \geq 3a_{j+1}$$

Cette relation est déjà plus maniable. Maintenant on aimerait utiliser que la suite est 2020-périodique. On va donc considérer un entier  $j \geq 1$  tel que  $a_j$  est maximal. Cela est possible étant donné que la suite prend un nombre fini de valeurs distinctes car elle est périodique. Quitte à retrancher 2020 à  $j$ , on suppose que  $j \geq 2$ .

On a donc  $3a_j \leq a_{j-1} + 2a_{j+1} \leq a_j + 2a_j = 3a_j$  par maximalité de  $a_j$ . En particulier, pour avoir égalité, on a forcément  $a_{j-1} = a_j = a_{j+1}$ . Une récurrence immédiate montre que si  $k \geq 0$ ,  $a_{j+k} = a_j$  et que si  $k \leq j-1$ ,  $a_{j-k} = a_j$ . La suite est donc constante et vaut  $a_j$ . L'inégalité devient donc  $a_j + 2a_j \geq a_j^2 + a_j + 1$  soit  $a_j^2 - 2a_j + 1 = (a_j - 1)^2 \leq 0$ , donc  $a_j = 1$ .

Réciproquement si  $a_k = 1$  pour tout  $k \geq 1$ , alors pour tout entier positif  $j$ ,  $a_j + 2a_{j+2} = 3 \geq 3 = a_{j+1}^2 + a_{j+1} + 1$  donc la suite constante valant 1 convient. La seule suite solution est donc la suite constante égale à 1.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est plutôt bien réussi, par de nombreuses méthodes diverses et variées. Néanmoins peu d'élèves ont pensé à vérifier que la suite obtenue à la fin était bien solution : même s'il était ici très facile de le vérifier, il faut penser à au moins mentionner une vérification. En effet, quand on demande de trouver toutes les solutions d'un problème, il faut toujours vérifier que les solutions obtenues sont bien solution.



*Exercice 7.* Soient  $a, b, c$  trois réels non nuls tels que

$$\begin{aligned}a^2 + b + c &= \frac{1}{a} \\b^2 + c + a &= \frac{1}{b} \\c^2 + a + b &= \frac{1}{c}\end{aligned}$$

Montrer qu'on a  $a = b$  ou  $a = c$  ou  $b = c$ .

Solution de l'exercice 7 Raisonnons par l'absurde : supposons que  $a \neq b$ ,  $b \neq c$  et  $c \neq a$ . En soustrayant les deux premières équations du système, on obtient

$$(a - b)(a + b) + (b - a) = \frac{b - a}{ab}$$

On peut simplifier par  $a - b$  qui est non nul par hypothèse pour obtenir  $a + b - 1 = \frac{-1}{ab}$ , donc  $a + b + \frac{1}{ab} = 1$ . Comme le système est cyclique, on a également  $b + c + \frac{1}{bc} = 1$ , donc  $a + b + \frac{1}{ab} = b + c + \frac{1}{bc}$ . L'égalité précédente implique que  $a - c = \frac{a - c}{abc}$  et donc  $abc = 1$  (on a simplifié par  $a - c$  qui est supposé non nul).

L'équation  $a + b + \frac{1}{ab} = 1$  devient  $a + b + c = 1$ . L'équation  $a^2 + b + c = \frac{1}{a}$  se réécrit  $a(a^2 + 1 - a) = 1$ , c'est-à-dire  $a^3 - a^2 + a - 1 = 0$ . On factorise le membre de gauche et on obtient  $(a - 1)(a^2 + 1) = 0$ . Comme  $a^2 + 1 > 0$ , on obtient que  $a = 1$ . Comme le système est cyclique, on a également  $b = 1$ , donc  $a = b$  ce qui contredit l'hypothèse faite initialement. Ainsi, par l'absurde, on a bien que  $a = b$  ou  $a = c$  ou  $b = c$ .

Commentaire des correcteurs : L'exercice est bien réussi par les élèves qui l'ont rendu. Attention aux étourderies ! Certains élèves ont donné de jolis arguments autour des polynômes. Bien sûr, il n'était pas nécessaire pour autant de connaître les polynômes pour résoudre l'exercice.

**Exercice 8.** Déterminer s'il existe deux réels  $S$  et  $P$  vérifiant la propriété suivante :

Il existe six réels distincts que l'on peut placer sur un cercle de sorte que, pour toute suite de trois réels consécutifs sur le cercle, soit leur somme vaut  $S$  soit leur produit vaut  $P$ .

Solution de l'exercice 8 Montrons que la réponse est non : il n'existe pas de tels  $S$  et  $P$ .

Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe  $S$  et  $P$  on note, dans l'ordre,  $x_1, \dots, x_6$  6 réels distincts vérifiant la propriété de l'énoncé. Notons  $x_7 = x_1$ ,  $x_8 = x_2$  et  $x_9 = x_3$ . On sait que si  $1 \leq i \leq 6$  alors  $x_i x_{i+1} x_{i+2} = P$  ou  $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} = S$ .

Supposons dans un premier temps que  $P \neq 0$ . Notons que si  $1 \leq i \leq 6$ ,  $x_i x_{i+1} x_{i+2} = x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3} = P$ , alors  $x_i = x_{i+3}$  (car  $x_{i+1}$  et  $x_{i+2}$  sont non nuls vu que  $P \neq 0$ ) ce qui contredit l'énoncé. En effet,  $x_{i+1}$  et  $x_{i+2}$  sont non nuls vu que  $P \neq 0$ .

De même, on ne peut pas avoir  $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} = S = x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3}$  sinon  $x_i = x_{i+3}$ . En particulier, si  $x_i x_{i+1} x_{i+2} = P$ , alors  $S = x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3}$ , et si  $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} = S$ , alors  $x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3} = P$ . On a donc une alternance sur le cercle de suites de trois nombres dont la produit vaut  $P$  et de suite de trois nombres dont la somme vaut  $S$ .

Quitte à renommer les  $(x_i)$ , on peut supposer que les  $(x_i)$  sont dans l'ordre du cercle et que  $x_1 + x_2 + x_3 = S$ . On a donc  $x_2 x_3 x_4 = x_4 x_5 x_6 = x_6 x_1 x_2 = P$  et  $x_1 + x_2 + x_3 = x_3 + x_4 + x_5 = x_5 + x_6 + x_1$ . On en déduit donc que  $x_2 + x_3 = x_5 + x_6$ . De plus, comme  $x_2 x_3 x_4 = x_4 x_5 x_6 = P$ ,  $x_4$  est non nul car  $P \neq 0$ . On obtient alors, en divisant par  $x_4$ , que  $x_2 x_3 = x_5 x_6$ . En particulier les paires de réels  $x_2, x_3$  et  $x_5, x_6$  ont même somme et même produit. Posons  $S' = x_2 + x_3$  et  $P' = x_2 x_3$ . Les réels  $x_2$  et  $x_3$  sont donc les deux racines du polynôme  $X^2 - S'X + P'$  d'après les relations de Viète. Mais vu que  $S' = x_5 + x_6$  et  $P' = x_5 x_6$ , les deux racines du polynôme  $X^2 - S'X + P'$  sont aussi  $x_5$  et  $x_6$ .

On en déduit que  $(x_2, x_3) = (x_5, x_6)$  ou  $(x_2, x_3) = (x_6, x_5)$ , donc les  $(x_i)$  ne sont pas distincts, ce qui contredit l'énoncé.

Reste à traiter le cas  $P = 0$ . Rappelons qu'on ne peut pas avoir  $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} = S = x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3}$  sinon  $x_i = x_{i+3}$ . Dans le cas où aucun des  $(x_i)_{1 \leq i \leq 6}$  n'est nul, le produit de trois réels consécutifs sur le cercle est toujours non nul, donc  $x_1 + x_2 + x_3 = S = x_2 + x_3 + x_4$  ce qui contredit la remarque précédente. Il y a donc un des  $(x_i)_{1 \leq i \leq 6}$  nul, quitte à les renommer dans l'ordre du cercle, on peut supposer  $x_1 = 0$ . On a donc  $x_2, x_3, x_4, x_5$  non nuls car différents de  $x_1$ . En particulier  $x_2 x_3 x_4 \neq P$  et  $x_3 x_4 x_5 \neq P$ , donc  $x_2 + x_3 + x_4 = S = x_3 + x_4 + x_5$  ce qui contredit la remarque précédente.

Ainsi il n'existe pas de tels  $S$  et  $P$ .

Commentaire des correcteurs : L'exercice était plutôt difficile mais a été globalement bien compris par ceux qui l'ont cherché. Certains se sont trouvés pleins de ressources pour prouver que  $a + b = c + d$  et  $ab = cd$  donne que deux nombres sont égaux sans utiliser les formules de Viète. Attention, beaucoup d'élèves ont oublié de traiter le cas  $P = 0$  qui empêchait de prouver directement l'alternance de sommes et de produits : on ne peut pas diviser par 0.

**Exercice 9.** Montrer que, si  $a, b, c$  sont des réels strictement positifs tels que  $a + b + c = 3$ , alors

$$\frac{abc + a^2c}{a^6 + b^2 + 4ac + 2} + \frac{abc + b^2a}{b^6 + c^2 + 4ab + 2} + \frac{abc + c^2b}{c^6 + a^2 + 4bc + 2} \leq \frac{3}{4}.$$

*Solution de l'exercice 9*

Remarquons tout d'abord qu'on a égalité si  $a = b = c = 1$ , car chaque fraction vaut  $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ .

Remarquons que le dénominateur de chaque fraction n'est pas homogène, il a deux termes de degré 2, un de degré 0, un de degré 6, on cherche donc à minorer  $a^6 + 2$  par une quantité de degré 2. Notons que dans le cas d'égalité  $a^6 = 1$ . Comme on a un cube, on va donc utiliser naturellement l'inégalité arithmético-géométrique :  $a^6 + 2 = a^6 + 1 + 1 \geq 3a^2$ . En faisant de même avec les autres dénominateurs, on obtient :

$$\frac{abc + a^2c}{a^6 + b^2 + 4ac + 2} + \frac{abc + b^2a}{b^6 + c^2 + 4ab + 2} + \frac{abc + c^2a}{c^6 + a^2 + 4bc + 2} \leq \frac{abc + a^2c}{3a^2 + b^2 + 4ac} + \frac{abc + b^2a}{3b^2 + c^2 + 4ab} + \frac{abc + c^2b}{3c^2 + a^2 + 4bc}$$

Notons que le numérateur de la première fraction peut se factoriser par  $ac$ , le second par  $ab$ , le troisième par  $bc$ . On aimerait donc que le dénominateur se factorise aussi. Or le premier dénominateur est presque factorisable par  $a$ , on va donc faire une inégalité arithmético-géométrique pour obtenir la factorisation voulue :  $3a^2 + b^2 + 4ac = 2a^2 + a^2 + b^2 + 4ac \geq 2a^2 + 2ab + 4ac = 2a(a + b + 2c)$ . On fait de même avec les autres dénominateurs et on obtient :

$$\frac{abc + a^2c}{a^6 + b^2 + 4ac + 2} + \frac{abc + b^2a}{b^6 + c^2 + 4ab + 2} + \frac{abc + c^2a}{c^6 + a^2 + 4bc + 2} \leq \frac{ac(a + b)}{2a(a + b + 2c)} + \frac{ab(b + c)}{2b(b + c + 2a)} + \frac{bc(a + c)}{2c(c + a + 2b)}$$

Il suffit donc de montrer que :

$$\frac{c(a + b)}{a + b + 2c} + \frac{a(b + c)}{b + c + 2a} + \frac{b(a + c)}{c + a + 2b} \leq \frac{3}{2}$$

On remarque que  $a + b$  ressemble au dénominateur  $a + b + 2c$ , pour cela on note que le terme de gauche vaut :

$$\frac{c(a + b + 2c)}{a + b + 2c} + \frac{a(b + c + 2a)}{b + c + 2a} + \frac{b(a + c + 2b)}{c + a + 2b} - 2 \left( \frac{c^2}{a + b + 2c} + \frac{a^2}{b + c + 2a} + \frac{b^2}{c + a + 2b} \right)$$

Il suffit ainsi de montrer que

$$a + b + c - 2 \left( \frac{c^2}{a + b + 2c} + \frac{a^2}{b + c + 2a} + \frac{b^2}{c + a + 2b} \right) \leq \frac{3}{2}$$

L'inégalité précédente est équivalente à

$$\frac{3}{2} \leq 2 \left( \frac{c^2}{a + b + 2c} + \frac{a^2}{b + c + 2a} + \frac{b^2}{c + a + 2b} \right)$$

, donc à

$$\frac{3}{4} \leq \frac{c^2}{a + b + 2c} + \frac{a^2}{b + c + 2a} + \frac{b^2}{c + a + 2b}$$

Or par l'inégalité des mauvais élèves on a

$$\frac{c^2}{a + b + 2c} + \frac{a^2}{b + c + 2a} + \frac{b^2}{c + a + 2b} \geq \frac{(a + b + c)^2}{4(a + b + c)} = \frac{a + b + c}{4} = \frac{3}{4}$$

ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs : L'exercice était très difficile et a été très peu réussi. Regarder les cas d'égalité est toujours pertinent et ici permettait de guider un peu les calculs. Néanmoins attention à ne pas confondre inégalité cyclique (remplacer  $(a, b, c)$  par  $(b, c, a)$  ne change pas l'inégalité) et inégalité symétrique (remplacer  $(a, b, c)$  par  $(b, a, c)$  et par  $(c, b, a)$  ne change pas l'inégalité). Dans le premier cas, il n'est pas possible de supposer que  $a \geq b \geq c$  (mais juste de supposer que  $a$  est le maximum ou le minimum), alors que dans le second cas, on peut supposer sans perte de généralité que  $a \geq b \geq c$ . Certains ont appliqué directement une inégalité arithmético-géométrique aux 8 termes du dénominateur : cette méthode bien que brutale semblait intelligente pour conclure en utilisant Muirhead, mais ont abouti sur un triplet qui ne dominait pas un autre : quand on utilise Muirhead, il faut savoir que dans ces cas là, il ne peut pas y avoir l'inégalité voulue et donc que l'inégalité utilisée initialement était trop forte.

## Exercices Seniors

*Exercice 10.* Trouver toutes les fonctions  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que, pour tous réels  $x, y$ ,

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y.$$

Solution de l'exercice 10 Testons d'abord des valeurs particulières : pour  $y = 0$ , on a  $f(x - f(0)) = 1 - x$ . On a quasiment  $f(x)$ , mais il faudrait juste faire "disparaître" le  $f(0)$ . Pour cela, soit  $z$  un réel quelconque. En posant  $x = z + f(0)$ , on a  $f(z) = 1 - (z + f(0)) = 1 - f(0) - z$ . Pour  $z = 0$ , on a  $f(0) = 1 - f(0)$  et donc  $f(0) = \frac{1}{2}$ . On en déduit donc que pour tout réel  $z$ ,  $f(z) = \frac{1}{2} - z$ .

Vérifions que cette fonction est bien solution :

$$f(x - f(y)) = f\left(x - \frac{1}{2} + y\right) = \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2} - y = 1 - x - y$$

donc la fonction qui à tout  $z$  réel associe  $\frac{1}{2} - z$  est bien l'unique solution de cette équation.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est très bien réussi. Quelques élèves ont oublié de vérifier que la fonction qu'ils obtenaient après leur analyse vérifiait bien l'équation et se sont vus pénalisés d'un point. D'autres plus rares, parce qu'ils sont allés trop vite sur cette vérification, affirment qu'aucune fonction n'est solution ou bien que toutes les fonctions de la forme  $x \mapsto -x + c$  sont des solutions.

*Exercice 11.* Pour tout entier  $n \geq 0$ , on pose

$$u_n = \frac{2n + 1 - 2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$$

Calculer  $(u_0 + \dots + u_{41})^2$ .

*Solution de l'exercice 11*

On commence par calculer les premiers termes de la suite  $(u_n)$ .

Pour  $n = 0$ , on a  $u_0 = 1$ , pour  $n = 1$ ,  $u_1 = \frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{(3-2\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2} - 1$ .

Pour  $n = 2$ ,  $u_2 = \frac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ , en multipliant numérateur et dénominateur par  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ , comme  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 3 - 2 = 1$ , on obtient  $u_2 = (5 - 2\sqrt{6})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ .  
A partir de ces deux premières valeurs, on peut raisonnablement conjecturer que  $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$  pour tout entier  $n$ .

Vérifions cela. Le fait que  $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$  est équivalent à l'égalité  $2n + 1 - 2\sqrt{n(n+1)} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2$ , qui correspond à une identité remarquable. On a donc obtenu une formule simple pour  $u_n$ .

Terminons maintenant l'exercice. Étant donné l'expression de  $u_n$ , la somme  $u_0 + u_1 + \dots + u_{41}$  est une somme télescopique. En particulier,

$$u_0 + \dots + u_{41} = \sqrt{1} - \sqrt{0} + \dots + \sqrt{42} - \sqrt{41} = \sqrt{42}$$

donc  $(u_0 + \dots + u_{41})^2 = 42$

Commentaire des correcteurs : Le problème est très bien réussi.

**Exercice 12.** Soit  $f$  la fonction polynomiale de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2 + 2020x + 1$  pour  $x \in \mathbb{R}$ . Soit  $n$  un entier strictement positif. On note  $f^n$  la composée  $n$ -ième de  $f$ , c'est-à-dire la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui vérifie

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(\dots(f(x))\dots))}_{n \text{ fois}}$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un réel  $x$  tel que  $f^n(x) = 0$ .

Solution de l'exercice 12

On commence par examiner l'énoncé pour des petites valeurs de  $n$ . Par exemple, pour  $n = 1$ , il s'agit de trouver une racine de  $f$ . On pourrait calculer son discriminant mais cette méthode ne se généralisera pas par la suite puisque  $f^n$  ne sera plus de degré 2.

Etant donné que  $f$  a des coefficients positifs, ses racines seront négatives. On peut essayer d'estimer leur position en évaluant  $f$  en des valeurs négatives. Or  $f(-1) = -2018$  et  $f(0) = 1$ . Ainsi  $f$  passe d'une valeur négative à une valeur positive : par continuité, elle possède donc une racine réelle. On remarque d'ailleurs que  $f$  prend aussi la valeur  $-1$  au passage et on peut donc utiliser le même raisonnement au rang 2. Mettons tout cela en forme dans une récurrence, dans le but de montrer le cas général :

On va prouver par récurrence sur  $n$  que pour tout entier strictement positif  $n$  la fonction  $f^n$  prend la valeur  $-1$  et  $0$ .

On a déjà prouvé l'initialisation en disant que  $f$  passe par  $-2018$  qui est une valeur strictement inférieure à  $-1$  (et  $0$ ) et par  $1$  qui est une valeur strictement supérieure au deux. Comme la fonction  $f$  est une fonction polynomiale, elle est continue et prend donc les valeurs  $-1$  et  $0$ .

Pour l'hérédité, soit  $n$  un entier strictement positif, on suppose que la fonction  $f^n$  prend les valeurs  $-1$  et  $0$  et on va prouver que c'est aussi le cas de  $f^{n+1}$ .

On note  $\alpha$  et  $\beta$  des antécédents respectifs de  $-1$  et  $0$ . On a  $f^{n+1}(\alpha) = f(f^n(\alpha)) = f(-1) = -2018$  et  $f^{n+1}(\beta) = f(f^n(\beta)) = f(0) = 1$ . Donc  $f^{n+1}$  prend pour valeur un nombre inférieur à  $-1$  et un nombre supérieur à  $0$ , elle prend donc les valeurs  $0$  et  $-1$  par le théorème des valeurs intermédiaires. En effet, elle est continue car c'est une fonction polynomiale. D'où l'hérédité et le résultat de la récurrence.

On a donc prouvé que pour tout entier  $n \geq 1$  il existe un réel  $x$  tel que  $f^n(x) = 0$

Commentaire des correcteurs : L'exercice est globalement bien réussi. Notons néanmoins que l'utilisation de la calculatrice est interdit en compétition. Il faut donc essayer de simplifier au maximum les calculs pour ne pas y avoir recours.

**Exercice 13.** Trouver toutes les fonctions  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que, pour tous réels  $x, y$ ,

$$f(x^2 + f(y)) = y + xf(x).$$

Solution de l'exercice 13 Commençons par tester des valeurs spécifiques de  $x$  et  $y$ . Pour  $x = 0$ ,  $f(f(y)) = y$ . En particulier  $f$  est injective. En effet, si  $a$  et  $b$  sont deux réels tels que  $f(a) = f(b)$ , alors  $a = f(f(a)) = f(f(b)) = b$ . La fonction  $f$  est aussi surjective. En effet, si  $y$  est un réel, alors  $f(f(y)) = y$  donc  $f(y)$  est un antécédent de  $y$ .

Pour  $y = 0$ , on a  $f(x^2 + f(0)) = xf(x)$ . Soit  $t$  un réel quelconque. En substituant dans l'équation  $x$  par  $f(t)$ , on a  $f(f(t)^2 + f(0)) = f(t)f(f(t)) = f(t) \times t = f(t^2 + f(0))$ . Par injectivité,  $f(t)^2 + f(0) = t^2 + f(0)$  donc  $f(t) = \pm t$ . Le problème est qu'on ne connaît pas bien le signe de  $f$ . Pour  $t = 0$ , on obtient toutefois  $f(0) = 0$ .

Attention : On a obtenu que pour tout  $t$ ,  $f(t) = t$  ou  $f(t) = -t$ . Cependant, on ne peut pas en déduire tout de suite que  $f(t) = t$  pour tout  $t$  ou  $f(t) = -t$  pour tout  $t$ . Par exemple, la fonction  $t \mapsto |t|$  vérifie que pour tout  $t$ ,  $f(t) = \pm t$ , mais ne vérifie ni " $f(t) = t$  pour tout  $t$ ", ni " $f(t) = -t$  pour tout  $t$ ".

Cependant, nous allons ici montrer que si  $f$  vérifie l'équation fonctionnelle, alors soit  $f(t) = t$  pour tout  $t$ , soit  $f(t) = -t$  pour tout  $t$ .

Supposons qu'il existe  $x$  et  $y$  non nuls tels que  $f(y) = y$  et  $f(x) = -x$ . L'équation précédente indique que  $f(x^2 + y) = \pm(x^2 + y) = y + xf(x) = y - x^2$ . Ainsi  $y - x^2 = x^2 + y$  ou  $y - x^2 = -x^2 - y$ . Dans le premier cas,  $-x^2 = x^2$  donc  $x^2 = 0$  donc  $x = 0$ , ce qui n'est pas possible car on avait supposé  $x \neq 0$ . Dans le second cas,  $y = -y$  donc  $y = 0$  qui est aussi contraire à notre hypothèse de départ. En particulier on a forcément, pour tout réel  $t$  non nul,  $f(t) = t$  ou, pour tout réel  $t$  non nul,  $f(t) = -t$ . Comme  $f(0) = 0$ , on en déduit que  $f$  est l'identité ou l'opposé de l'identité.

Vérifions maintenant les solutions. Si  $f$  est l'identité,  $f(x^2 + f(y)) = f(x^2 + y) = y + x^2 = y + xf(x)$  donc  $f$  est solution. Si pour tout réel  $t$ ,  $f(t) = -t$ , alors  $f(x^2 + f(y)) = f(x^2 - y) = y - x^2 = y + xf(x)$  donc  $f$  est solution. Les fonctions  $f$  solutions sont l'identité et l'opposé de l'identité.

Commentaire des correcteurs : Exercice plutôt bien réussi. Plusieurs erreurs sont fréquemment revenues. Le piège le plus prominent était le multigraphe. Plusieurs élèves trouvent  $f(x) = \pm x$  et sautent directement à la conclusion que les seules solutions sont  $f(x) = x$  et  $f(x) = -x$ , oubliant ainsi toutes les éventuelles solutions intermédiaires (par exemple, à ce stade de l'exercice, les élèves n'ont pas encore prouvé que la fonction  $x \mapsto |x|$  n'était pas solution, alors que celle-ci vérifie que  $f(x) = \pm x$ ). Un autre nombre conséquent d'élèves prouve que  $xf(x) = -xf(-x)$ , donc que  $f$  est impaire (sauf éventuellement en 0), et en déduisent que  $f(0) = 0$ . Or l'égalité  $xf(x) = -xf(-x)$  n'apporte aucune information très justement quand  $x = 0$  ! Rappelons finalement que l'équation de Cauchy de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est connue pour **ne pas** avoir que des solutions linéaires. C'était donc une fausse route.



**Exercice 14.** Déterminer s'il existe deux réels  $S$  et  $P$  vérifiant la propriété suivante :

Il existe six réels distincts que l'on peut placer sur un cercle de sorte que, pour toute suite de trois réels consécutifs sur le cercle, soit leur somme vaut  $S$  soit leur produit vaut  $P$ .

Solution de l'exercice 14 Montrons que la réponse est non : il n'existe pas de tels  $S$  et  $P$ .

Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe  $S$  et  $P$  on note, dans l'ordre,  $x_1, \dots, x_6$  6 réels distincts vérifiant la propriété de l'énoncé. Notons  $x_7 = x_1$ ,  $x_8 = x_2$  et  $x_9 = x_3$ . On sait que si  $1 \leq i \leq 6$  alors  $x_i x_{i+1} x_{i+2} = P$  ou  $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} = S$ .

Supposons dans un premier temps que  $P \neq 0$ . Notons que si  $1 \leq i \leq 6$ ,  $x_i x_{i+1} x_{i+2} = x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3} = P$ , alors  $x_i = x_{i+3}$  (car  $x_{i+1}$  et  $x_{i+2}$  sont non nuls vu que  $P \neq 0$ ) ce qui contredit l'énoncé. En effet,  $x_{i+1}$  et  $x_{i+2}$  sont non nuls vu que  $P \neq 0$ .

De même, on ne peut pas avoir  $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} = S = x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3}$  sinon  $x_i = x_{i+3}$ . En particulier, si  $x_i x_{i+1} x_{i+2} = P$ , alors  $S = x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3}$ , et si  $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} = S$ , alors  $x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3} = P$ . On a donc une alternance sur le cercle de suites de trois nombres dont la produit vaut  $P$  et de suite de trois nombres dont la somme vaut  $S$ .

Quitte à renommer les  $(x_i)$ , on peut supposer que les  $(x_i)$  sont dans l'ordre du cercle et que  $x_1 + x_2 + x_3 = S$ . On a donc  $x_2 x_3 x_4 = x_4 x_5 x_6 = x_6 x_1 x_2 = P$  et  $x_1 + x_2 + x_3 = x_3 + x_4 + x_5 = x_5 + x_6 + x_1$ . On en déduit donc que  $x_2 + x_3 = x_5 + x_6$ . De plus, comme  $x_2 x_3 x_4 = x_4 x_5 x_6 = P$ ,  $x_4$  est non nul car  $P \neq 0$ . On obtient alors, en divisant par  $x_4$ , que  $x_2 x_3 = x_5 x_6$ . En particulier les paires de réels  $x_2, x_3$  et  $x_5, x_6$  ont même somme et même produit. Posons  $S' = x_2 + x_3$  et  $P' = x_2 x_3$ . Les réels  $x_2$  et  $x_3$  sont donc les deux racines du polynôme  $X^2 - S'X + P'$  d'après les relations de Viète. Mais vu que  $S' = x_5 + x_6$  et  $P' = x_5 x_6$ , les deux racines du polynôme  $X^2 - S'X + P'$  sont aussi  $x_5$  et  $x_6$ .

On en déduit que  $(x_2, x_3) = (x_5, x_6)$  ou  $(x_2, x_3) = (x_6, x_5)$ , donc les  $(x_i)$  ne sont pas distincts, ce qui contredit l'énoncé.

Reste à traiter le cas  $P = 0$ . Rappelons qu'on ne peut pas avoir  $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} = S = x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3}$  sinon  $x_i = x_{i+3}$ . Dans le cas où aucun des  $(x_i)_{1 \leq i \leq 6}$  n'est nul, le produit de trois réels consécutifs sur le cercle est toujours non nul, donc  $x_1 + x_2 + x_3 = S = x_2 + x_3 + x_4$  ce qui contredit la remarque précédente. Il y a donc un des  $(x_i)_{1 \leq i \leq 6}$  nul, quitte à les renommer dans l'ordre du cercle, on peut supposer  $x_1 = 0$ . On a donc  $x_2, x_3, x_4, x_5$  non nuls car différents de  $x_1$ . En particulier  $x_2 x_3 x_4 \neq P$  et  $x_3 x_4 x_5 \neq P$ , donc  $x_2 + x_3 + x_4 = S = x_3 + x_4 + x_5$  ce qui contredit la remarque précédente.

Ainsi il n'existe pas de tels  $S$  et  $P$ .

Commentaire des correcteurs : Exercice bien compris dans l'ensemble. Les possibilités pour conclure à partir du système se sont trouvées très nombreuses. Attention, beaucoup d'élèves ont oublié de traiter le cas  $P = 0$  qui empêchait de prouver directement l'alternance de sommes et de produits : on ne peut pas diviser par 0 !

**Exercice 15.** Soit  $n \geq 1$  un entier. Trouver tous les  $n$ -uplets de réels strictement positifs  $(x_1, \dots, x_n)$  tels que

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right) \left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right) \dots \left(x_n + \frac{1}{x_1}\right) = \left(x_1^2 + \frac{1}{x_2^2}\right) \left(x_2^2 + \frac{1}{x_3^2}\right) \dots \left(x_n^2 + \frac{1}{x_1^2}\right).$$

*Solution de l'exercice 15*

On commence par tester l'énoncé sur des petites valeurs de  $n$ .

Essayons tout d'abord le cas  $n = 1$ . On veut résoudre  $x_1 + \frac{1}{x_1} = x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}$ . Par inégalité arithmético-géométrique, chaque terme vaut au moins 2, mais cela est peu utile pour le moment.

Pour comparer une somme de termes et la somme de leurs carrés, on utilise plutôt l'inégalité des moyennes arithmétique et quadratique. Celle-ci nous donne :  $x_1^2 + \frac{1}{x_1^2} \geq \frac{(x_1 + \frac{1}{x_1})^2}{2}$ . Ainsi, on obtient

$$x_1 + \frac{1}{x_1} \geq \frac{(x_1 + \frac{1}{x_1})^2}{2}.$$

Puisque  $x_1 + \frac{1}{x_1}$  est toujours strictement positif, on peut simplifier l'inégalité par  $x_1 + \frac{1}{x_1}$  pour en déduire que  $x_1 + \frac{1}{x_1} \leq 2$ . Or  $x_1 + \frac{1}{x_1} \geq 2$  par inégalité arithmético-géométrique avec égalité si et seulement si  $x_1 = \frac{1}{x_1}$ , i.e. si et seulement si  $x_1^2 = 1$ . On a donc égalité si et seulement si  $x_1 = 1$ .

Essayons de transposer cette méthode au cas général : soit  $(x_1, \dots, x_n)$  un  $n$ -uplet solution. On a par inégalité arithmético-quadratique :

$$\left(x_1^2 + \frac{1}{x_2^2}\right) \left(x_2^2 + \frac{1}{x_3^2}\right) \dots \left(x_n^2 + \frac{1}{x_1^2}\right) \geq \frac{\left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)^2}{2} \frac{\left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right)^2}{2} \dots \frac{\left(x_n + \frac{1}{x_1}\right)^2}{2}$$

En couplant cela avec l'hypothèse de départ, on en déduit que

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right) \left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right) \dots \left(x_n + \frac{1}{x_1}\right) \leq 2^n$$

Or par inégalité arithmético-géométrique,

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right) \left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right) \dots \left(x_n + \frac{1}{x_1}\right) \geq 2\sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \times 2\sqrt{\frac{a_2}{a_3}} \dots 2\sqrt{\frac{a_n}{a_1}} = 2^n$$

On a donc égalité dans les inégalités. On en déduit que si  $1 \leq i \leq n-1$ , alors  $x_i = \frac{1}{x_{i+1}}$ , et  $x_n = \frac{1}{x_1}$ . Ainsi si  $1 \leq i \leq n-2$ , alors  $x_i = \frac{1}{x_{i+1}} = x_{i+2}$ .

Ainsi si  $n$  est impair,  $x_1 = x_3 = \dots = x_n = \frac{1}{x_1} = x_2 = x_4 = \dots = x_{n-1}$  donc tous les  $x_i$  sont égaux.

On a donc en simplifiant l'équation initiale  $x_1 + \frac{1}{x_1} = x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}$  donc d'après le premier cas  $x_1 = 1$ . Réciproquement le  $n$ -uplet constitué de 1 est bien solution, puisqu'on a bien  $2^n = 2^n$ .

Si  $n$  est pair, on obtient que  $x_1 = x_3 = \dots = x_{n-1}$  et  $x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{x_1}$ . Comme si  $i$  est impair,  $x_i + \frac{1}{x_{i+1}} = 2x_1$  et si  $i$  est pair,  $x_i + \frac{1}{x_{i+1}} = \frac{2}{x_1}$ , chaque terme de l'équation initial vaut  $2^n$  : on a bien égalité.

Ainsi on obtient que si  $n$  est impair, la seule solution est  $(1, 1, \dots, 1)$  et si  $n$  est pair, les solutions sont les  $n$ -uplets de la forme  $(a, \frac{1}{a}, a, \dots, a, \frac{1}{a})$  avec  $a > 0$ .

Commentaire des correcteurs : L'exercice est bien résolu. Les élèves ont proposé des méthodes originales et ingénieuses.

**Exercice 16.** Benoît et Théo jouent au jeu suivant : au départ, le polynôme  $X^{2020}$  est écrit au tableau. Chacun leur tour, Benoît et Théo ajoutent un monôme de la forme  $X^k$  avec  $0 \leq k \leq 2020$  au polynôme précédent. A la fin du tour de Théo, Benoît gagne si, en notant  $P$  le polynôme écrit, il existe  $x$  tel que  $P(x) < 0$ ; sinon, le jeu continue. Si Benoît commence, montrer que Théo peut s'assurer de ne pas perdre.

*Solution de l'exercice 16* Afin de deviner une stratégie pour Théo, on commence par tester le jeu pour des petites valeurs, par exemple en remplaçant 2020 par 2.

A chaque fois que Benoît ajoute 1 ou  $X^2$ , cela ne change pas le signe du polynôme, le problème est donc quand Benoît joue  $X$ . En fait on sait que  $1 + x^2 \geq 2x$  pour tout  $x$ . Donc si Benoît joue deux fois  $X$ , il suffit de jouer  $X^2$  et 1 pour le contrer.

On peut essayer de généraliser cette idée : en fait  $x^{2k+2} + x^{2k} \geq 2x^{2k+1}$  car cette inégalité est équivalente à  $x^{2k}(x-1)^2 \geq 0$ . On peut donc imaginer que si Benoît joue  $X^{2k+1}$  une fois, Théo joue  $X^{2k}$ , puis si Benoît rejoue  $X^{2k+1}$  Théo joue  $X^{2k+2}$ . Ainsi, donnons la stratégie suivante pour Théo :

- Si Benoît rajoute un monôme de la forme  $X^{2k}$  avec  $k$  un entier positif, Théo fait de même.
- Si Benoît rajoute un monôme de la forme  $X^{2k+1}$  et qu'une fois cela fait, il y en a un nombre impair d'écrits, Théo joue  $X^{2k}$ ; sinon il joue  $X^{2k+2}$

Supposons que si Théo joue ainsi, Benoît a une stratégie gagnante. On note  $k$  le nombre minimum de tours nécessaires à Benoît pour gagner. Notons également  $i_1, \dots, i_k$  les degrés des monômes ajoutés par Benoît pour gagner en  $k$  tours,  $P$  le polynôme obtenu à la fin et  $x$  un réel tel que  $P(x) < 0$ . Si un des  $i_j$  est pair, alors lors du tour correspondant, à eux deux, Benoît et Théo ont ajouté  $2X^{i_j}$  au polynôme écrit. Si Benoît emploie la même stratégie en enlevant ce tour, il obtient le polynôme  $P - 2X^{i_j}$  et  $P(x) - 2x^{i_j} \leq P(x) < 0$ , ce qui contredit la minimalité de  $k$ . Ainsi tous les  $i_j$  sont impairs.

Supposons qu'il existe un nombre impair  $a$  présent plusieurs fois dans la suite  $(i_n)_{1 \leq n \leq k}$ . Notons  $j < j'$  les deux plus petits indices tels que  $i_j = i_{j'} = a$ . Lors des étapes  $j$  et  $j'$ , Benoît et Théo ont ajouté en tout le polynôme  $X^{a-1} + 2X^a + X^{a+1}$  au polynôme. Si Benoît emploie la même stratégie en enlevant ces deux tours, il obtient le polynôme  $P - (X^{a-1} + 2X^a + X^{a+1})$  qui vérifie, d'après la remarque précédente,  $P(x) - (x^{a-1} + 2x^a + x^{a+1}) \leq P(x) < 0$  ce qui contredit la minimalité de  $k$ .

Ainsi les  $(i_j)_{1 \leq j \leq k}$  sont des nombres impairs deux à deux distincts. On note  $2a_1 + 1 < \dots < 2a_k + 1$  les  $(i_j)_{1 \leq j \leq k}$  rangés par ordre croissant. Le polynôme  $P$  obtenu est  $\sum_{i=1}^k (X^{2a_i} + X^{2a_i+1}) + X^{2020} = \sum_{i=1}^k X^{2a_i} (X + 1) + X^{2020}$ . Ainsi si  $x \geq -1$ , on a bien  $P(x) \geq 0$  car  $x^{2a_i} \geq 0$  pour tout  $i$  contradiction.

On a donc  $x < -1$ , notons que  $P = X^{2a_1} + \sum_{i=1}^{k-1} (X^{2a_i+1} + X^{2a_{i+1}}) + (X^{2a_k+1} + X^{2020})$ . Posons  $a_{k+1} = 1010$ , pour aboutir à une contradiction et montrer que  $P(x) \geq 0$ , il suffit de montrer que  $x^{2a_i+1} + x^{2a_{i+1}} \geq 0$  pour tout  $i$ . L'inégalité précédente est vraie car  $x^{2a_i+1} + x^{2a_{i+1}} = x^{2a_{i+1}}(1 + x^{2a_i+1-2a_{i+1}}) \geq 0$ . En effet, comme  $a_i < a_{i+1}$ , on a bien  $a_{i+1} \geq a_i + 1$ . On en déduit que  $2a_i + 1 - 2a_{i+1} < 0$  donc que  $1 > (1 + x^{2a_i+1-2a_{i+1}}) > 0$ .

Dans tous les cas on aboutit à une absurdité : la stratégie de Théo est donc bien une stratégie gagnante.

*Solution alternative n°1* L'idée est cette fois pour Théo de ne jouer que  $X^{2020}$  et 1.

Disons qu'à son  $n$ -ième tour, Benoît joue  $X^{c_n}$ . Posons  $\alpha_n = \frac{c_n}{2020}$  et  $\beta_n = 1 - \alpha_n$ , cela de sorte que  $c_n = \alpha_n \cdot 2020 + \beta_n \cdot 0$  avec  $\alpha_n + \beta_n = 1$  et  $\alpha_n, \beta_n \in [0, 1]$  (car  $c_n \in [0, 2020]$ ). L'inégalité arithmético-géométrique pondérée donne alors

$$\alpha_n x^{2020} + \beta_n = \alpha_n |x|^{2020} + \beta_n \geq |x|^{\alpha_n \cdot 2020 + \beta_n \cdot 0} = |x|^{c_n}$$

Le but de Théo est maintenant de s'assurer d'avoir joué "suffisamment" de  $X^{2020}$  et de 1 pour pouvoir majorer de la sorte tous les  $|X|^{c_n}$ . Exactement, si on écrit  $a_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ ,  $b_n = \sum_{i=1}^n \beta_i$ , il faut que après son  $n$ -ième tour on ait  $P = A_n X^{2020} + B_n + \sum_{i=1}^n X^{c_i}$  avec  $A_n \geq a_n$ ,  $B_n \geq b_n$ . De plus, on doit avoir  $A_n + B_n = n + 1$  et  $(A_{n+1}, B_{n+1}) \in \{(A_n + 1, B_n), (A_n, B_n + 1)\}$  car Théo ne joue qu'un monôme par tour et part avec un monôme d'avance (le  $X^{2020}$  écrit au début).

Prouvons par récurrence sur  $n$  que Théo peut s'assurer d'avoir  $A_n \geq a_n$  et  $B_n \geq b_n$  :

Initialisation :  $A_0 = 1 > 0 = a_0$  et  $B_0 = 0 = b_0$ .

Hérédité : Remarquons que  $a_{n+1} + b_{n+1} = \alpha_1 + (1 - \alpha_1) + \dots + \alpha_{n+1} + (1 - \alpha_{n+1}) = n + 1 = A_n + B_n$ .

Ainsi, on peut avoir  $a_{n+1} > A_n$  ou  $b_{n+1} > B_n$  mais pas les deux. Si  $a_{n+1} > A_n$ , alors Théo joue  $X^{2020}$  de sorte que  $A_{n+1} = A_n + 1 \geq a_n + \alpha_{n+1} = a_{n+1}$  et  $B_{n+1} = B_n \geq b_{n+1}$ . Sinon, Théo joue 1 de sorte que  $B_{n+1} = B_n + 1 \geq b_n + \beta_{n+1} = b_{n+1}$  et  $A_{n+1} = A_n \geq a_{n+1}$ .

Ainsi, après le  $n$ -ième tour de Théo,

$$P(x) = A_n x^{2020} + B_n + \sum_{i=1}^n x^{c_i} \geq \sum_{i=1}^n (\alpha_i x^{2020} + \beta_i + x^{c_i}) \geq \sum_{i=1}^n (|x|^{c_i} + x^{c_i}) \geq 0$$

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été bien réussi mais plutôt peu adressé. Notons qu'il est important de tester sa stratégie sur des cas simples (Benoit qui joue toujours  $X$ , ou toujours  $X^{2019}$ ) pour voir si elle est effective. Ainsi, plusieurs élèves auraient pu voir que la stratégie qu'ils proposaient ne marchait pas.

**Exercice 17.** Trouver toutes les fonctions  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que, pour tous réels  $a, b$  :

$$f(a + 2f(a)f(b)) = f(a) + 2af(b).$$

Solution de l'exercice 17 Soit  $f$  une fonction qui vérifie l'équation.

Notons que  $f = 0$  est solution. Supposons maintenant que  $f$  n'est pas identiquement nulle. Ainsi il existe  $z \in \mathbb{R}$  tel que  $f(z) \neq 0$ .

Supposons qu'il existe un antécédent de 0 et notons  $\alpha$  un tel antécédent. Pour  $a = \alpha$  et  $b = z$ , on obtient  $f(\alpha + 2 \cdot 0f(z)) = f(\alpha) + 2\alpha f(z)$ . On a ainsi  $f(\alpha) = 0 = 2\alpha f(z)$ , donc  $\alpha = 0$ . Ainsi, s'il existe, l'unique antécédent de 0 par  $f$  est 0.

On considère l'équation initiale en  $a = b = -\frac{1}{2}$  :  $f(-\frac{1}{2} + 2f(-\frac{1}{2})^2) = f(-\frac{1}{2}) - f(-\frac{1}{2}) = 0$ . Par ce qui précède on a donc  $-\frac{1}{2} + 2f(-\frac{1}{2})^2 = 0$ , soit  $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \pm\frac{1}{2}$ .

Notons que si  $f$  est solution,  $-f$  aussi. Quitte à considérer  $-f$ , on suppose  $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ .

Pour  $a = -\frac{1}{2}$  et en  $b = x \in \mathbb{R}$  quelconque, on obtient  $f(-\frac{1}{2} - f(x)) = -\frac{1}{2} - f(x)$

Pour  $a = -\frac{1}{2}$  et  $b = -\frac{1}{2} - f(x)$ , on a  $f(f(x)) = f(x)$ .

Pour  $x, y \in \mathbb{R}$ , en prenant  $a = f(x)$  et  $b = -\frac{1}{2} - f(y)$ , on obtient  $f(-2f(x)f(y)) = -2f(x)f(y)$ .

Ainsi, si on a deux éléments  $c$  et  $d$  appartenant à l'image de  $f$ ,  $-2cd$  appartient aussi à l'image de  $f$ .

Soit  $g \neq 0$  dans l'image de  $f$ , pour  $a = \frac{1}{4g}$  et  $b = -2f(\frac{1}{4g})g$ . On sait que  $b$  est un point fixe de  $f$  d'après l'égalité précédente. On a donc  $f(\frac{1}{4g} - 4gf(\frac{1}{4g})^2) = f(\frac{1}{4g}) - 4\frac{1}{4g}f(\frac{1}{4g})g = 0$  donc  $\frac{1}{4g} - 4gf(\frac{1}{4g})^2 = 0$ . On déduit de cela que  $-2f(\frac{1}{4g})^2 = 0 = \frac{-1}{8g^2}$  est dans l'image de  $f$ . Comme  $g$  est dans l'image de  $f$ ,  $\frac{(-2) \times (-1)}{8g^2} \times g = \frac{1}{4g}$  est aussi dans l'image de  $f$ . Ainsi si  $h$  est un élément de l'image de  $f$ ,  $\frac{-h}{2g}$  est dans l'image de  $f$ .

Enfin pour  $x$  un réel non nul, pour  $a = x$  et  $b = -2f(x)f(z)$  on obtient

$$f(x - 4f(x)^2f(z)) = f(x) - 4xf(x)f(z)$$

ce qui donne  $\frac{f(x - 4f(x)^2f(z))}{f(x)} = 1 - 4xf(z)$

En divisant par  $-2$ , on obtient que

$$2xf(z) - \frac{1}{2} = \frac{f(x - 4f(x)^2f(z))}{-2f(x)}$$

est dans l'image de  $f$ .

Or  $f(z)$  est non nul donc  $2xf(z) - \frac{1}{2}$  prend toutes les valeurs possibles dans  $\mathbb{R}$  lorsque  $x$  parcourt  $\mathbb{R}$ .

L'image de  $f$  est donc  $\mathbb{R}$ .

Or on avait pour  $x$  quelconque  $f(f(x)) = f(x)$ , donc  $f$  est l'identité.

En particulier si  $f$  est solution,  $f$  est l'identité ou moins l'identité, ou la fonction nulle.

On vérifie facilement que les trois fonctions trouvées (la fonction nulle, la fonction identité et la fonction moins l'identité) sont bien solution de l'équation, ce sont donc les seules.

Commentaire des correcteurs : L'exercice était difficile mais les correcteurs ont apprécié que plusieurs élèves aient rendu des débuts de solution même s'ils n'avaient pas de solution complète. Quelques élèves commettent l'erreur d'effectuer une substitution du type  $y = f(b)$  pour obtenir une équation du type  $f(y) = \dots$  et affirment que cette équation est vraie pour tous les réels  $y$ . Cependant, cela n'est vrai que pour les réels  $y$  qui sont dans l'image de  $f$ , et l'image de  $f$  n'est pas forcément tout  $\mathbb{R}$ . La plupart des élèves ont identifié les trois solutions. Parmi eux, plusieurs établissent des résultats intéressants, comme le fait que 0 est le seul antécédent de 0,  $f\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$  voire même que dans un cas  $f(f(x)) = f(x)$  et qu'il existe des valeurs  $a$  telles que  $f(a) = a$  et des valeurs  $a$  telles que  $f(a) = -a$ . La plupart ont alors bien compris l'enjeu de montrer que  $a - f(a)$  a ces deux propriétés en même temps. Mais seule une poignée d'élèves parvient à montrer correctement ce dernier point et à résoudre l'exercice.

**Exercice 18.** On dit qu'un ensemble  $A$  de polynômes à coefficients réels est magnifique si, lorsque  $P$  et  $Q$  sont deux éléments distincts de  $A$ , il existe des entiers positifs  $\alpha_1 > \dots > \alpha_{2020}$  tels que

$$PQ = \sum_{i=1}^{2020} iX^{\alpha_i}.$$

Quel est le cardinal maximal d'un ensemble magnifique ?

Solution de l'exercice 18 Soit  $A$  un ensemble magnifique. Supposons que  $A$  admet 3 éléments distincts, qu'on note  $P, Q, R$ .

Comme  $P^2 = \frac{(PQ) \times (PR)}{QR}$ ,  $P^2$  est le produit de deux polynômes à coefficients entiers unitaires, divisé par un polynôme à coefficient entier unitaire. C'est donc un polynôme à coefficients rationnels qui est aussi unitaire. En effet, l'algorithme d'Euclide permettant de calculer le PGCD entre deux polynômes à coefficients rationnels donne un quotient et un reste à coefficients rationnels, car l'ensemble des rationnels est stable par division multiplication, somme et différence.

Ainsi  $P^2$  est un polynôme unitaire à coefficients rationnels. Notons  $P = \sum_{n=0}^d \alpha_n X^n$  avec  $\alpha_d \neq 0$ . On a  $\alpha_d^2 = 1$ , donc  $\alpha_d = \pm 1$ . Montrons par récurrence descendante forte que  $\alpha_i$  est rationnel pour tout  $i$  entre 0 et  $n$ .

L'initialisation vient du fait que  $\alpha_n = \pm 1$ . Pour l'hérédité, soit  $i \in \{0, n-1\}$  tel que  $\alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n$  sont rationnels. Le coefficient de degré  $i+n$  de  $P^2$  vaut  $\sum_{j=i}^n \alpha_j \alpha_{n+i-j} = 2\alpha_i \alpha_n + \sum_{j=i+1}^{n-1} \alpha_j \alpha_{n+i-j}$ .

Or, si  $i+1 \leq j \leq n-1$ ,  $\alpha_j$  et  $\alpha_{n+i-j}$  sont rationnels, on en déduit que  $\sum_{j=i+1}^{n-1} \alpha_j \alpha_{n+i-j}$  est rationnel.

Comme le coefficient de degré  $i+n$  de  $P^2$  est rationnel,  $2\alpha_i \alpha_n$  est aussi rationnel. Ainsi comme  $\alpha_n = \pm 1$ ,  $\alpha_i$  est rationnel, ce qui conclut la récurrence.

Or  $P^2(1) = 1 + \dots + 2020 = \frac{2020 \times 2021}{2} = 1010 \times 2021$  qui est divisible par 2 mais pas par 4. En particulier, comme  $P_i$  est à coefficients rationnels, il existe  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  tels que  $P(1) = \frac{p}{q}$ . On a donc  $p^2 = 1010 \times 2021 \times q^2$ . On obtient que  $p \neq 0$ , et que  $V_2(p^2) = 2V_2(p) = V_2(1010 \times 2021 \times q^2) = 1 + 2V_2(q)$ . On en conclut que  $2V_2(p) = 2V_2(q) + 1$ . Comme le terme de gauche est pair et celui de droite impair, on obtient une contradiction.

Ainsi on ne peut avoir  $|A| \geq 3$ . Par contre, on peut avoir  $|A| = 2$  en prenant  $A = \{1, \sum_{i=1}^{2019} iX^{2019-i}\}$  qui convient bien. On en déduit que le cardinal maximal d'un ensemble magnifique est 2.

Solution alternative n°1 Cette solution est essentiellement la même que la précédente mais présentée sous un autre angle. La première solution prouvait que les coefficients des polynômes sont rationnels. L'idée supplémentaire est de remarquer qu'on peut dire la même chose des polynômes divisés par  $\sqrt{2020}$ . Supposons  $A \supseteq \{P, Q, R\}$  magnifique. Puisque  $P^2 \cdot QR = PQ \cdot RP$  et que  $PQ, QR, RP$  sont des polynômes unitaires et à coefficients rationnels,  $P^2$  l'est aussi.

Appelons  $\tilde{P}$  le polynôme qu'on obtient en retournant les coefficients de  $P$ . Précisément, si  $P = \sum_{i=0}^n p_i X^i$  avec  $p_n \neq 0$ , alors  $\tilde{P} = \sum_{i=0}^n p_{n-i} X^i$ . Retourner les coefficients est compatible avec la multiplication, c'est-à-dire que  $\tilde{PQ} = \tilde{P}\tilde{Q}$ .

Dans notre cas, on remarque que  $\frac{\tilde{PQ}}{2020}, \frac{\tilde{QR}}{2020}, \frac{\tilde{RP}}{2020}$  sont eux-aussi unitaires et à coefficients rationnels car

$$\frac{\tilde{PQ}}{2020} = \sum_{i=1}^{2020} \frac{i}{2020} X^{\alpha_1 - \alpha_i} = X^{\alpha_1 - \alpha_{2020}} + \frac{2019}{2020} X^{\alpha_1 - \alpha_{2019}} + \dots + \frac{1}{2020}$$

Ainsi, en répétant l'argument, puisque  $\left(\frac{\tilde{P}}{\sqrt{2020}}\right)^2 \cdot \frac{\tilde{Q}\tilde{R}}{2020} = \frac{\tilde{P}\tilde{Q}}{2020} \cdot \frac{\tilde{R}\tilde{P}}{2020}$  et que  $\frac{\tilde{P}\tilde{Q}}{2020}, \frac{\tilde{Q}\tilde{R}}{2020}, \frac{\tilde{R}\tilde{P}}{2020}$  sont des polynômes unitaires et à coefficients rationnels,  $\left(\frac{\tilde{P}}{\sqrt{2020}}\right)^2$  l'est aussi.

Comme prouvé dans la solution 1, à partir de  $P^2 \in \mathbb{Q}[X]$  et  $P^2$  unitaire, on obtient  $P \in \mathbb{Q}[X]$ . Or à partir de  $\left(\frac{\tilde{P}}{\sqrt{2020}}\right)^2 \in \mathbb{Q}[X]$  et  $\left(\frac{\tilde{P}}{\sqrt{2020}}\right)^2$  unitaire, on obtient  $\frac{\tilde{P}}{\sqrt{2020}} \in \mathbb{Q}[X]$ . Contradiction, car  $P \neq 0$ .

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été très peu abordé. Les idées données par les élèves qui ont cherché le problème sont cependant excellentes et prouvent une bonne compréhension de l'exercice. Il n'y a que peu d'erreurs à proprement parler et la seule remarque à faire est que certaines notions (degré, relations de Viète) étaient condamnées à échouer au vu du fait qu'on pouvait remplacer  $P \in A$  par  $XP$  et que les degrés des éléments de  $A$  sont peu maîtrisés, une observation parfois salvatrice à faire.