PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 1 : ALGÈBRE

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 25 DÉCEMBRE 2020

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2006 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soit x un réel strictement positif. Montrer que $x^3 + \frac{1}{x} \geqslant 2x$ et trouver les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 1 Etant donné que x est un réel strictement positif, il en est de même de x^3 et $\frac{1}{x}$. L'inégalité arithmético-géométrique indique alors que

$$x^3 + \frac{1}{x} \geqslant 2\sqrt{\frac{x^3}{x}} = 2\sqrt{x^2} = 2x$$

Pour déterminer le cas d'égalité, il faut regarder le cas d'égalité des moyennes. En effet, si l'on a égalité, cela signifie que $x^3 = \frac{1}{x}$. On a donc $x^4 = 1$, ce qui implique que $x^2 = 1$ ou $x^2 = -1$. Puisque x est réel, $x^2 \geqslant 0$, on a donc $x^2 = 1$. Cela implique que $x = 1$ ou $x = -1$. Puisque x est positif, on a forcément $x = 1$.

Réciproquement, si $x = 1$, alors $x^3 + \frac{1}{x} = 2 = 2x$

Exercice 2. Montrer que pour tous réels $a, b, c > 0$, on a

$$\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a} \geqslant \frac{9}{a+b+c}.$$

Trouver les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 2   Comme on a une somme de fractions, on est très tenté d'utiliser l'inégalité des mauvais élèves. On factorise préalablement par 2 :

$$2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geqslant 1 = 2 \times \frac{(1+1+1)^3}{a+b+b+c+c+a} = \frac{2\times 9}{2(a+b+c)} = \frac{9}{a+b+c}.$$

Pour déterminer le cas d'égalité, il faut regarder le cas d'égalité de l'inégalité des mauvais élèves. Celui-ci indique que si l'on a égalité, alors $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a+c} = \frac{1}{b+c}$, donc $a+b = b+c = a+c$. En particulier, comme $a+b = b+c$, $a = c$ et comme $a+b = a+c$, $b = c$, donc $a = b = c$.

Réciproquement si $a = b = c$, alors

$$\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a} = 3 \times \frac{2}{2a} = \frac{3}{a} = \frac{9}{a+b+c}$$

et on a bien égalité.

Exercice 3. Soit a, b, c, d des réels positifs tels que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Montrer qu'il existe deux réels parmi a, b, c, d dont la somme vaut au plus 2.

Solution de l'exercice 3 L'énoncé nous donne une hypothèse sur la somme $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ mais nous demande de montrer un résultat sur les nombres a, b, c et d. Pour passer des variables a^2, b^2, c^2 et d^2 aux variables a, b, c et d, on utilise l'inégalité des moyennes arithmétique et quadratique. Celle-ci indique que

$$\frac{a+b+c+d}{4} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}$$

On obtient donc que $a + b + c + d \leqslant 4$. En particulier, soit $a + b \leqslant 2$, soit $a + b \geqslant 2$. Si $a + b \leqslant 2$, on a déjà gagné. Dans le cas où $a + b \geqslant 2$, on a que $c + d \leqslant 4 - (a + b) \leqslant 2$ ce qui donne également le résultat voulu.

Exercice 4. Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} = 1$. Montrer que

$$\frac{a}{b^2+1} - \frac{b}{a^2+1} = a - b.$$

Solution de l'exercice 4 On commence par examiner l'hypothèse donnée et essayant d'exprimer b en fonction de a.
On a :

$$\frac{a}{a+1} = 1 - \frac{b}{b+1} = \frac{1}{b+1}$$

Ceci nous permet d'isoler b. en passant l'équation à l'inverse, on obtient :

$$b+1 = \frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a}$$

On a donc $b = \frac{1}{a}$.

On peut alors calculer l'expression demandée :

$$\frac{a}{b^2+1} - \frac{b}{a^2+1} = \frac{a}{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + 1} - \frac{1}{a(a^2+1)} = \frac{a^3}{a^2+1} - \frac{1}{a(a^2+1)} = \frac{a^4-1}{a(a^2+1)}$$

On utilise alors l'identité remarquable $a^4 - 1 = (a^2+1)(a^2-1)$. On a alors :

$$\frac{a}{b^2+1} - \frac{b}{a^2+1} == \frac{a^4-1}{a(a^2+1)} = \frac{a^2-1}{a} = a - \frac{1}{a} = a - b$$

ce qui donne bien le résultat voulu.

Exercice 5. Soit a, b, c trois réels strictement positifs, montrer que $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geqslant \frac{4a}{a+b}$. Trouver les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 5 On commence par se débarrasser du dénominateur contenant $a+b$. Ainsi, il est équivalent de montrer l'inégalité :

$$(a+b)\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}\right) \geqslant 4a$$

qui se réécrit, en développant le côté droit :

$$\frac{ab}{c}+\frac{a^2}{c}+\frac{ac}{b}+c \geqslant 4a$$

Pour minorer une somme de termes, on peut alors appliquer l'inégalité des moyennes arithmétique et géométrique à 4 variables. On a en effet :

$$\frac{ab}{c}+\frac{a^2}{c}+\frac{ac}{b}+c \geqslant 4\sqrt[4]{\frac{ab}{c}\cdot\frac{a^2}{c}\cdot\frac{ac}{b}\cdot c} = 4a$$

ce qui correspond à l'inégalité voulue.

Pour trouver le cas d'égalité, on regarde le cas d'égalité de l'inégalité des moyennes. Si on a égalité, il faut donc que $\dfrac{ab}{c} = \dfrac{a^2}{c} = \dfrac{ac}{b} = c$. En particulier, $\dfrac{a^2}{c} = c$ et $\dfrac{ac}{b} = \dfrac{ab}{c}$. La première égalité donne $a^2 = c^2$ donc $a = c$ car a et c sont tous les deux positifs. La deuxième égalité, après suppression des dénominateurs et simplification par a, donne que $c^2 = b^2$ donc $c = b$ car b et c sont tous les deux positifs. Ainsi, $a = b = c > 0$.

Réciproquement si $a = b = c > 0$, on a bien $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} = 2 = \frac{4a}{a+b}$. On a donc égalité si et seulement si $a = b = c$.

Solution alternative n°1 On propose une seconde solution utilisant cette fois-ci l'inégalité des mauvais élèves. Pour cela, on voudrait avoir un a et un b au dénominateur. Le b étant déjà présent dans l'une des deux fractions, on peut faire apparaître le a avec le dénominateur de l'autre fraction :

$$\frac{a}{c}+\frac{c}{b} = \frac{a^2/c}{a}+\frac{c}{b}$$

En utilisant l'inégalité des mauvais élèves, on obtient :

$$\frac{\frac{a^2}{c}}{a}+\frac{c}{b} \geqslant \frac{\left(\frac{a}{\sqrt{c}}+\sqrt{c}\right)^2}{a+b}$$

Or, par l'inégalité arithmético-géométrique, $\dfrac{a}{\sqrt{c}} + \sqrt{c} \geqslant 2\sqrt{a}$, donc

$$\frac{a^2/c}{a}+\frac{c}{b} \geqslant \frac{(2\sqrt{a})^2}{a+b} = \frac{4a}{a+b}$$

Si on a égalité, alors on a égalité dans chacune des inégalités utilisées. En particulier, on a égalité dans l'inégalité des moyennes appliquée à $\dfrac{a}{\sqrt{c}}$ et $\sqrt{c}$, si bien que $\frac{a}{\sqrt{c}} = \sqrt{c}$. On obtient ainsi que $a = c$. On est également dans le cas d'égalité de l'inégalité des mauvais élèves, ce qui nous permet d'affirmer que $\dfrac{a^2/c}{a} = \dfrac{c}{b}$. Comme $a = c$, on en déduit que $1 = \frac{c}{b}$ donc $b = c = a$.

Réciproquement, dans ce cas on a égalité comme prouvé dans la solution : on a donc égalité si et seulement si $a = b = c$.

Exercice 6. Déterminer toutes les suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de réels telles que $a_i = a_{i+2020}$ pour tout entier $i \geqslant 1$, et telles que

$$a_j + 2a_{j+2} \geqslant a_{j+1}^2 + a_{j+1} + 1$$

pour tout entier $j \geqslant 1$.

Solution de l'exercice 6 Ici, les termes dans l'inégalité a_{j+1}^2 et 1 semblent un peu pénibles, car ils ne sont pas de degré 1 comme les autres termes de l'inégalité. On aimerait se ramener à une inégalité homogène, c'est-à-dire une inégalité qui reste vraie si l'on multiple les différents termes par un même facteur k. On va donc utiliser l'inégalité $x^2 + 1 \geqslant 2x$ qui est vraie pour tout réel x, car $(x-1)^2 \geqslant 0$. Cette inégalité appliquée à la relation donne

$$a_j + 2a_{j+2} \geqslant a_{j+1} + a_{j+1}^2 + 1 \geqslant 3a_{j+1}$$

Cette relation est déjà plus maniable. Maintenant on aimerait utiliser que la suite est 2020-périodique. On va donc considérer un entier $j \geqslant 1$ tel que a_j est maximal. Cela est possible étant donné que la suite prend un nombre fini de valeurs distinctes car elle est périodique. Quitte à retrancher 2020 à j, on suppose que $j \geqslant 2$.

On a donc $3a_j \leqslant a_{j-1} + 2a_{j+1} \leqslant a_j + 2a_j = 3a_j$ par maximalité de a_j. En particulier, pour avoir égalité, on a forcément $a_{j-1} = a_j = a_{j+1}$. Une récurrence immédiate montre que si $k \geqslant 0$, $a_{j+k} = a_j$ et que si $k \leqslant j-1$, $a_{j-k} = a_j$. La suite est donc constante et vaut a_j. L'inégalité devient donc $a_j + 2a_j \geqslant a_j^2 + a_j + 1$ soit $a_j^2 - 2a_j + 1 = (a_j - 1)^2 \leqslant 0$, donc $a_j = 1$.

Réciproquement si $a_k = 1$ pour tout $k \geqslant 1$, alors pour tout entier positif j, $a_j + 2a_{j+2} = 3 \geqslant 3 = a_{j+1}^2 + a_{j+1} + 1$ donc la suite constante valant 1 convient. La seule suite solution est donc la suite constante égale à 1.

Exercice 7. Soient a, b, c trois réels non nuls tels que

$$\begin{aligned} a^2 + b + c &= \frac{1}{a} \\ b^2 + c + a &= \frac{1}{b} \\ c^2 + a + b &= \frac{1}{c} \end{aligned}$$

Montrer qu'on a $a = b$ ou $a = c$ ou $b = c$.

Solution de l'exercice 7 Raisonnons par l'absurde : supposons que $a \neq b$, $b \neq c$ et $c \neq a$. En soustrayant les deux premières équations du système, on obtient

$$(a-b)(a+b) + (b-a) = \frac{b-a}{ab}$$

On peut simplifier par $a-b$ qui est non nul par hypothèse pour obtenir $a+b-1 = \frac{-1}{ab}$, donc $a+b+\frac{1}{ab} = 1$. Comme le système est cyclique, on a également $b + c + \frac{1}{bc} = 1$, donc $a + b + \frac{1}{ab} = b + c + \frac{1}{bc}$. L'égalité précédente implique que $a-c = \frac{a-c}{abc}$ et donc $abc = 1$ (on a simplifié par $a-c$ qui est supposé non nul).

L'équation $a+b+\frac{1}{ab} = 1$ devient $a+b+c = 1$. L'équation $a^2+b+c = \frac{1}{a}$ se réécrit $a(a^2+1-a) = 1$, c'est-à-dire $a^3 - a^2 + a - 1 = 0$. On factorise le memebre de gauche et on obtient $(a-1)(a^2+1) = 0$. Comme $a^2 + 1 > 0$, on obtient que $a = 1$. Comme le système est cyclique, on a également $b = 1$, donc $a = b$ ce qui contredit l'hypothèse faite initialement. Ainsi, par l'absurde, on a bien que $a = b$ ou $a = c$ ou $b = c$.

Exercice 8. Déterminer s'il existe deux réels S et P vérifiant la propriété suivante :

> Il existe six réels distincts que l'on peut placer sur un cercle de sorte que, pour toute suite de trois réels consécutifs sur le cercle, soit leur somme vaut S soit leur produit vaut P.

Solution de l'exercice 8 Montrons que la réponse est non : il n'existe pas de tels S et P.

Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe S et P on note, dans l'ordre, $x_1, \ldots, x_6$ 6 réels distincts vérifiant la propriété de l'énoncé. Notons $x_7 = x_1$, $x_8 = x_2$ et $x_9 = x_3$. On sait que si $1 \leqslant i \leqslant 7$ alors $x_i x_{i+1} x_{i+2} = P$ ou $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} = S$.

Supposons dans un premier temps que $P \neq 0$. Notons que si $1 \leqslant i \leqslant 6$, $x_i x_{i+1} x_{i+2} = x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3} = P$, alors $x_i = x_{i+3}$ (car x_{i+1} et x_{i+2} sont non nuls vu que $P \neq 0$) ce qui contredit l'énoncé. En effet, x_{i+1} et x_{i+2} sont non nuls vu que $P \neq 0$.

De même, on ne peut pas avoir $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} = S = x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3}$ sinon $x_i = x_{i+3}$. En particulier, si $x_i x_{i+1} x_{i+2} = P$, alors $S = x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3}$, et si $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} = S$, alors $x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3} = P$. On a donc une alternance sur le cercle de suites de trois nombres dont la produit vaut P et de suite de trois nombres dont la somme vaut S.

Quitte à renommer les (x_i), on peut supposer que les (x_i) sont dans l'ordre du cercle et que $x_1 + x_2 + x_3 = S$. On a donc $x_2 x_3 x_4 = x_4 x_5 x_6 = x_6 x_1 x_2 = P$ et $x_1 + x_2 + x_3 = x_3 + x_4 + x_5 = x_5 + x_6 + x_1$. On en déduit donc que $x_2 + x_3 = x_5 + x_6$. De plus, comme $x_2 x_3 x_4 = x_4 x_5 x_6 = P$, x_4 est non nul car $P \neq 0$. On obtient alors, en divisant par x_4, que $x_2 x_3 = x_5 x_6$. En particulier les paires de réels x_2, x_3 et x_5, x_6 ont même somme et même produit. Posons $S' = x_2 + x_3$ et $P' = x_2 x_3$. Les réels x_2 et x_3 sont donc les deux racines du polynôme $X^2 - S'X + P'$ d'après les relations de Viète. Mais vu que $S' = x_5 + x_6$ et $P' = x_5 x_6$, les deux racines du polynôme $X^2 - S'X + P'$ sont aussi x_5 et x_6
On en déduit que $(x_2, x_3) = (x_5, x_6)$ ou $(x_2, x_3) = (x_6, x_5)$, donc les (x_i) ne sont pas distincts, ce qui contredit l'énoncé.
Reste à traiter le cas $P = 0$. Rappelons qu'on ne peut pas avoir $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} = S = x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3}$ sinon $x_i = x_{i+3}$. Dans le cas où aucun des $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant 6}$ n'est nul, le produit de trois réels consécutifs sur le cercle est toujours non nul, donc $x_1 + x_2 + x_3 = S = x_2 + x_3 + x_4$ ce qui contredit la remarque précédente. Il y a donc un des $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant 6}$ nul, quitte à les renommer dans l'ordre du cercle, on peut supposer $x_1 = 0$. On a donc x_2, x_3, x_4, x_5 non nuls car différents de x_1. En particulier $x_2 x_3 x_4 \neq P$ et $x_3 x_4 x_5 \neq P$, donc $x_2 + x_3 + x_4 = S = x_3 + x_4 + x_5$ ce qui contredit la remarque précédente.
Ainsi il n'existe pas de tels S et P.

Exercice 9. Montrer que, si a, b, c sont des réels strictement positifs tels que $a+b+c=3$, alors

$$\frac{abc+a^2c}{a^6+b^2+4ac+2}+\frac{abc+b^2a}{b^6+c^2+4ab+2}+\frac{abc+c^2b}{c^6+a^2+4bc+2}\leqslant\frac{3}{4}.$$

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>
Remarquons tout d'abord qu'on a égalité si $a=b=c=1$, car chaque fraction vaut $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.
Remarquons que le dénominateur de chaque fraction n'est pas homogène, il a deux termes de degré 2, un de degré 0, un de degré 6, on chercher donc à minorer a^6+2 par une quantité de degré 2. Notons que dans le cas d'égalité $a^6=1$. Comme on a un cube, on va donc utiliser naturellement l'inégalité arithmético-géométrique : $a^6+2=a^6+1+1\geqslant 3a^2$. En faisant de même avec les autres dénominateurs, on obtient :

$$\frac{abc+a^2c}{a^6+b^2+4ac+2}+\frac{abc+b^2a}{b^6+c^2+4ab+2}+\frac{abc+c^2a}{c^6+a^2+4bc+2}\leqslant\frac{abc+a^2c}{3a^2+b^2+4ac}+\frac{abc+b^2a}{3b^2+c^2+4ab}+\frac{abc+c^2b}{3c^2+a^2+4bc}$$

Notons que le numérateur de la première fraction peut se factoriser par ac, le second par ab, le troisième par bc. On aimerait donc que le dénominateur se factorise aussi. Or le premier dénominateur est presque factorisable par a, on va donc faire une inégalité arithmético-géométrique pour obtenir la factorisation voulue : $3a^2+b^2+4ac=2a^2+a^2+b^2+4ac\geqslant 2a^2+2ab+4ac=2a(a+b+2c)$. On fait de même avec les autres dénominateurs et on obtient :

$$\frac{abc+a^2c}{a^6+b^2+4ac+2}+\frac{abc+b^2a}{b^6+c^2+4ab+2}+\frac{abc+c^2a}{c^6+a^2+4bc+2}\leqslant\frac{ac(a+b)}{2a(a+b+2c)}+\frac{ab(b+c)}{2b(b+c+2a)}+\frac{bc(a+c)}{2c(c+a+2b)}$$

Il suffit donc de montrer que :

$$\frac{c(a+b)}{a+b+2c}+\frac{a(b+c)}{b+c+2a}+\frac{b(a+c)}{c+a+2b}\leqslant\frac{3}{2}$$

On remarque que $a+b$ ressemble au dénominateur $a+b+2c$, pour cela on note que le terme de gauche vaut :

$$\frac{c(a+b+2c)}{a+b+2c}+\frac{a(b+c+2a)}{b+c+2b}+\frac{b(a+c+2b)}{c+a+2b}-2\left(\frac{c^2}{a+b+2c}+\frac{a^2}{b+c+2a}+\frac{b^2}{c+a+2b}\right)$$

.
Il suffit ainsi de montrer que

$$a+b+c-2\left(\frac{c^2}{a+b+2c}+\frac{a^2}{b+c+2a}+\frac{b^2}{c+a+2b}\right)\leqslant\frac{3}{2}$$

L'inégalité précédente est équivalente à

$$\frac{3}{2}\leqslant 2\left(\frac{c^2}{a+b+2c}+\frac{a^2}{b+c+2a}+\frac{b^2}{c+a+2b}\right)$$

, donc à

$$\frac{3}{4}\leqslant\frac{c^2}{a+b+2c}+\frac{a^2}{b+c+2b}+\frac{b^2}{c+a+2b}$$

Or par l'inégalité des mauvais élèves on a

$$\frac{c^2}{a+b+2c}+\frac{a^2}{b+c+2a}+\frac{b^2}{c+a+2b}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{4(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{4}=\frac{3}{4}$$

ce qui conclut.

Exercices Seniors

Exercice 10. Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y,

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y.$$

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> Testons d'abord des valeurs particulières : pour $y = 0$, on a $f(x-f(0)) = 1-x$. On a quasiment $f(x)$, mais il faudrait juste faire "disparaître" le $f(0)$. Pour cela, soit z un réel quelconque. En posant $x = z + f(0)$, on a $f(z) = 1 - (z + f(0)) = 1 - f(0) - z$. Pour $z = 0$, on a $f(0) = 1 - f(0)$ et donc $f(0) = \frac{1}{2}$. On en déduit donc que pour tout réel z, $f(z) = \frac{1}{2} - z$.

Vérifions que cette fonction est bien solution :

$$f(x - f(y)) = f(x - \frac{1}{2} + y) = \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2} - y = 1 - x - y$$

donc la fonction qui à tout z réel associe $\frac{1}{2} - z$ est bien l'unique solution de cette équation.

Exercice 11. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose

$$U_n = \frac{2n+1-2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

Calculer $(U_0 + \cdots + U_{41})^2$.

Solution de l'exercice 11
On commence par calculer les premiers termes de la suite (U_n).
Pour $n = 0$, on a $U_0 = 1$, pour $n = 1$, $U_1 = \frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{(3-2\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}-1$.
Pour $n = 2$, $U_2 = \frac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, en multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{3}+\sqrt{2}$, comme $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = 3-2-1$, on obtient $U_2 = (5-2\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 5\sqrt{3}-4\sqrt{3}-5\sqrt{2}-6\sqrt{2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$.
A partir de ces deux premières valeur, on peut raisonnablement conjecturer que $U_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ pour tout entier n.

Vérifions cela. Le fait que $U_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ est équivalent à l'égalité $2n+1-2\sqrt{n(n+1)} = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2$, qui correspond à une identité remarquable. On a donc obtenu une formule simple pour U_n.

Terminons maintenant l'exercice. Etant donné l'expression de U_n, la somme $U_0 + U_1 + \ldots + U_{41}$ est une somme télescopique. En particulier,

$$U_0 + \cdots + U_{41} = \sqrt{1}-\sqrt{0}+\cdots+\sqrt{42}-\sqrt{41} = \sqrt{42}$$

donc $(U_0 + \cdots + U_{41})^2 = 42$

Exercice 12. Soit f la fonction polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 2020x + 1$ pour $x \in \mathbb{R}$. Soit n un entier strictement positif. On note f^n la composée n-ième de f, c'est-à-dire la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(\cdots(f}_{n \text{ fois}}(x))\cdots))$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel x tel que $f^n(x) = 0$.

Solution de l'exercice 12
On commence par examiner l'énoncé pour des petites valeurs de n. Par exemple, pour $n = 1$, il s'agit de trouver une racine de f. On pourrait calculer son discirminant mais cette méthode ne se généralisera pas par la suite puisque f^n ne sera plus de degré 2.
Etant donné que f a des coefficients positifs, ses racines seront négatives. On peut essayer d'estimer leur position en évaluant f en des valeurs négatives. Or $f(-1) = -2018$ et $f(0) = 1$. Ainsi f passe d'une valeur négative à une valeur positive : par continuité, elle possède donc une racine réelle. On remarque d'ailleurs que f prend aussi la valeur -1 au passage et on peut donc utiliser le même raisonnement au rang 2. Mettons tout cela en forme dans une récurrence, dans le but de montrer le cas général :

On va prouver par récurrence sur n que pour tout entier strictement positif n la fonction f^n prend la valeur -1 et 0.
On a déjà prouvé l'initialisation en disant que f passe par -2018 qui est une valeur strictement inférieure à -1 (et 0) et par 1 qui est une valeur strictement supérieure au deux. Comme la fonction f est une fonction polynomiale, elle est continue et prend donc les valeurs -1 et 0.
Pour l'hérédité, soit n un entier strictement positif, on suppose que la fonction f^n prend les valeurs -1 et 0 et on va prouver que c'est aussi le cas de f^{n+1}.

On note α et β des antécédents respectifs de -1 et 0. On a $f^{n+1}(\alpha) = f(f^n(\alpha)) = f(-1) = -2018$ et $f^{n+1}(\beta) = f(f^n(\beta)) = f(0) = 1$. Donc f^{n+1} prend pour valeur un nombre inférieur à -1 et un nombre supérieur à 0, elle prend donc les valeurs 0 et -1 par le théorème des valeurs intermédiaires. En effet, elle est continue car c'est une fonction polynomiale. D'où l'hérédité et le résultat de la récurrence.
On a donc prouvé que pour tout entier $n \geqslant 1$ il existe un réel x tel que $f^n(x) = 0$

Exercice 13. Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y,

$$f(x^2 + f(y)) = y + xf(x).$$

<u>*Solution de l'exercice 13*</u> Commençons par tester des valeurs spécifiques de x et y. Pour $x = 0$, $f(f(y)) = y$. En particulier f est injective. En effet, si a et b sont deux réels tels que $f(a) = f(b)$, alors $a = f(f(a)) = f(f(b)) = b$. La fonction f est aussi surjective. En effet, si y est un réel, alors $f(f(y)) = y$ donc $f(y)$ est un antécédent de y.
Pour $y = 0$, on a $f(x^2 + f(0)) = xf(x)$. Soit t un réel quelconque. En substituant dans l'équation x par $f(t)$, on a $f(f(t)^2+f(0)) = f(t)f(f(t)) = f(t)\times t = f(t^2+f(0))$. Par injectivité, $f(t)^2+f(0) = t^2+f(0)$ donc $f(t) = \pm t$. Le problème est qu'on ne connaît pas bien le signe de f. Pour $t = 0$, on obtient toutefois $f(0) = 0$.

Attention : On a obtenu que pour tout t, $f(t) = t$ ou $f(t) = -t$. Cependant, on ne peut pas en déduire tout de suite que $f(t) = t$ pour tout t ou $f(t) = -t$ pour tout t. Par exemple, la fonction $t \mapsto |t|$ vérifie que pour tout t, $f(t) = \pm t$, mais ne vérifie ni "$f(t) = t$ pour tout t", ni "$f(t) = -t$ pour tout t".
Cependant, nous allons ici montrer que si f vérifie l'équation fonctionnelle, alors soit $f(t) = t$ pour tout t, soit $f(t) = -t$ pour tout t.

Supposons qu'il existe x et y non nuls tels que $f(y) = y$ et $f(x) = -x$. L'équation précédente indique que $f(x^2 + y) = \pm(x^2 + y) = y + xf(x) = y - x^2$. Ainsi $y - x^2 = x^2 + y$ ou $y - x^2 = -x^2 - y$. Dans le premier cas, $-x^2 = x^2$ donc $x^2 = 0$ donc $x = 0$, ce qui n'est pas possible car on avait supposé $x \neq 0$. Dans le second cas, $y = -y$ donc $y = 0$ qui est aussi contraire à notre hypothèse de départ. En particulier on a forcément, pour tout réel t non nul, $f(t) = t$ ou, pour tout réel t non nul, $f(t) = -t$. Comme $f(0) = 0$, on en déduit que f est l'identité ou l'opposé de l'identité.

Vérifions maintenant les solutions. Si f est l'identité, $f(x^2 + f(y)) = f(x^2 + y) = y + x^2 = y + xf(x)$ donc f est solution. Si pour tout réel t, $f(t) = -t$, alors $f(x^2 + f(y)) = f(x^2 - y) = y - x^2 = y + xf(x)$ donc f est solution. Les fonctions f solutions sont l'identité et l'opposé de l'identité.

Exercice 14. Déterminer s'il existe deux réels S et P vérifiant la propriété suivante :

> Il existe six réels distincts que l'on peut placer sur un cercle de sorte que, pour toute suite de trois réels consécutifs sur le cercle, soit leur somme vaut S soit leur produit vaut P.

Solution de l'exercice 14 Montrons que la réponse est non : il n'existe pas de tels S et P.

Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe S et P on note, dans l'ordre, $x_1, \ldots, x_6$ 6 réels distincts vérifiant la propriété de l'énoncé. Notons $x_7 = x_1$, $x_8 = x_2$ et $x_9 = x_3$. On sait que si $1 \leqslant i \leqslant 7$ alors $x_i x_{i+1} x_{i+2} = P$ ou $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} = S$.

Supposons dans un premier temps que $P \neq 0$. Notons que si $1 \leqslant i \leqslant 6$, $x_i x_{i+1} x_{i+2} = x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3} = P$, alors $x_i = x_{i+3}$ (car x_{i+1} et x_{i+2} sont non nuls vu que $P \neq 0$) ce qui contredit l'énoncé. En effet, x_{i+1} et x_{i+2} sont non nuls vu que $P \neq 0$.

De même, on ne peut pas avoir $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} = S = x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3}$ sinon $x_i = x_{i+3}$. En particulier, si $x_i x_{i+1} x_{i+2} = P$, alors $S = x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3}$, et si $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} = S$, alors $x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3} = P$. On a donc une alternance sur le cercle de suites de trois nombres dont la produit vaut P et de suite de trois nombres dont la somme vaut S.

Quitte à renommer les (x_i), on peut supposer que les (x_i) sont dans l'ordre du cercle et que $x_1 + x_2 + x_3 = S$. On a donc $x_2 x_3 x_4 = x_4 x_5 x_6 = x_6 x_1 x_2 = P$ et $x_1 + x_2 + x_3 = x_3 + x_4 + x_5 = x_5 + x_6 + x_1$. On en déduit donc que $x_2 + x_3 = x_5 + x_6$. De plus, comme $x_2 x_3 x_4 = x_4 x_5 x_6 = P$, x_4 est non nul car $P \neq 0$. On obtient alors, en divisant par x_4, que $x_2 x_3 = x_5 x_6$. En particulier les paires de réels x_2, x_3 et x_5, x_6 ont même somme et même produit. Posons $S' = x_2 + x_3$ et $P' = x_2 x_3$. Les réels x_2 et x_3 sont donc les deux racines du polynôme $X^2 - S'X + P'$ d'après les relations de Viète. Mais vu que $S' = x_5 + x_6$ et $P' = x_5 x_6$, les deux racines du polynôme $X^2 - S'X + P'$ sont aussi x_5 et x_6
On en déduit que $(x_2, x_3) = (x_5, x_6)$ ou $(x_2, x_3) = (x_6, x_5)$, donc les (x_i) ne sont pas distincts, ce qui contredit l'énoncé.
Reste à traiter le cas $P = 0$. Rappelons qu'on ne peut pas avoir $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} = S = x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3}$ sinon $x_i = x_{i+3}$. Dans le cas où aucun des $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant 6}$ n'est nul, le produit de trois réels consécutifs sur le cercle est toujours non nul, donc $x_1 + x_2 + x_3 = S = x_2 + x_3 + x_4$ ce qui contredit la remarque précédente.
Il y a donc un des $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant 6}$ nul, quitte à les renommer dans l'ordre du cercle, on peut supposer $x_1 = 0$. On a donc x_2, x_3, x_4, x_5 non nuls car différents de x_1. En particulier $x_2 x_3 x_4 \neq P$ et $x_3 x_4 x_5 \neq P$, donc $x_2 + x_3 + x_4 = S = x_3 + x_4 + x_5$ ce qui contredit la remarque précédente.
Ainsi il n'existe pas de tels S et P.

Exercice 15. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Trouver tous les n-uplets de réels strictement positifs $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right)\ldots\left(x_n + \frac{1}{x_1}\right) = \left(x_1^2 + \frac{1}{x_2^2}\right)\left(x_2^2 + \frac{1}{x_3^2}\right)\ldots\left(x_n^2 + \frac{1}{x_1^2}\right).$$

<u>*Solution de l'exercice 15*</u>

On commence par tester l'énoncé sur des petites valeurs de n.

Essayons tout d'abord le cas $n = 1$. On veut résoudre $x_1 + \dfrac{1}{x_1} = x_1^2 + \dfrac{1}{x_1^2}$. Par inégalité arithmético-géométrique, chaque terme vaut au moins 2, mais cela est peu utile pour le moment.

Pour comparer une somme de termes et la somme de leurs carrés, on utilise plutôt l'inégalité des moyennes arithmétique et quadratique. Celle-ci nous donne : $x_1^2 + \frac{1}{x_1^2} \geqslant \frac{(x_1+\frac{1}{x_1})^2}{2}$. Ainsi, on obtient

$$x_1 + \frac{1}{x_1} \geqslant \frac{(x_1 + \frac{1}{x_1})^2}{2}.$$

Puisque $x_1 + \dfrac{1}{x_1}$ est toujours strictement positif, on peut simplifier l'inégalité par $x_1 + \dfrac{1}{x_1}$ pour en déduire que $x_1 + \frac{1}{x_1} \leqslant 2$. Or $x_1 + \frac{1}{x_1} \geqslant 2$ par inégalité arithmético-géométrique avec égalité si et seulement si $x_1 = \frac{1}{x_1}$, i.e. si et seulement si $x_1^2 = 1$. On a donc égalité si et seulement si $x_1 = 1$.

Essayons de transposer cette méthode au cas général : soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un n-uplet solution. On a par inégalité arithmético-quadratique :

$$\left(x_1^2 + \frac{1}{x_2^2}\right)\left(x_2^2 + \frac{1}{x_3^2}\right)\ldots\left(x_n^2 + \frac{1}{x_1^2}\right) \geqslant \frac{\left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)^2}{2}\frac{\left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right)^2}{2}\ldots\frac{\left(x_n + \frac{1}{x_1}\right)^2}{2}$$

En couplant cela avec l'hypothèse de départ, on en déduit que

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right)\ldots\left(x_n + \frac{1}{x_1}\right) \leqslant 2^n$$

Or par inégalité arithmético-géométrique,

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right)\ldots\left(x_n + \frac{1}{x_1}\right) \geqslant 2\sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \times 2\sqrt{\frac{a_2}{a_3}}\ldots 2\sqrt{\frac{a_n}{a_1}} = 2^n$$

On a donc égalité dans les inégalités. On en déduit que si $1 \leqslant i \leqslant n-1$, alors $x_i = \frac{1}{x_{i+1}}$, et $x_n = \frac{1}{x_1}$. Ainsi si $1 \leqslant i \leqslant n-2$, alors $x_i = \frac{1}{x_{i+1}} = x_{i+2}$.

Ainsi si n est impair, $x_1 = x_3 = \cdots = x_n = \frac{1}{x_1} = x_2 = x_4 = \cdots = x_{n-1}$ donc tous les x_i sont égaux. On a donc en simplifiant l'équation initiale $x_1 + \dfrac{1}{x_1} = x_1^2 + \dfrac{1}{x_1^2}$ donc d'après le premier cas $x_1 = 1$. Réciproquement le n-uplet constitué de 1 est bien solution, puisqu'on a bien $2^n = 2^n$.

Si n est pair, on obtient que $x_1 = x_3 = \cdots = x_{n-1}$ et $x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{x_1}$. Comme si i est impair, $x_i + \frac{1}{x_{i+1}} = 2x_1$ et si i est pair, $x_i + \frac{1}{x_{i+1}} = \frac{2}{x_1}$, chaque terme de l'équation initial vaut 2^n : on a bien égalité.

Ainsi on obtient que si n est impair, la seule solution est $(1, 1, \ldots, 1)$ et si n est pair, les solutions sont les n-uplets de la forme $(a, \frac{1}{a}, a \ldots, a, \frac{1}{a})$ avec $a > 0$.

Exercice 16. Benoît et Théo jouent au jeu suivant : au départ, le polynôme X^{2020} est écrit au tableau. Chacun leur tour, Benoît et Théo ajoutent un monôme de la forme X^k avec $0 \leqslant k \leqslant 2020$ au polynôme précédent. A la fin du tour de Théo, Benoît gagne si, en notant P le polynôme écrit, il existe x tel que $P(x) < 0$; sinon, le jeu continue. Si Benoît commence, montrer que Théo peut s'assurer de ne pas perdre.

<u>*Solution de l'exercice 16*</u> Afin de deviner une stratégie pour Théo, on commence par tester le jeu pour des petites valeurs, par exemple en remplaçant 2020 par 2.
A chaque fois que Benoît ajoute 1 ou X^2, cela ne change pas le signe du polynôme, le problème est donc quand Benoît joue X. En fait on sait que $1 + x^2 \geqslant 2x$ pour tout x. Donc si Benoît joue deux fois X, il suffit de jouer X^2 et 1 pour le contrer.

On peut essayer de généraliser cette idée : en fait $x^{2k+2} + x^{2k} \geqslant 2x^{2k+1}$ car cette inégalité est équivalente à $x^{2k}(x-1)^2 \geqslant 0$. On peut donc imaginer que si Benoît joue X^{2k+1} une fois, Théo joue X^{2k}, puis si Benoît rejoue X^{2k+1} Théo joue X^{2k+2}. Ainsi, donnons la stratégie suivante pour Théo :

— Si Benoît rajoute un monôme de la forme X^{2k} avec k un entier positif, Théo fait de même.
— Si Benoît rajoute un monôme de la forme X^{2k+1} et qu'une fois cela fait, il y en a un nombre impair d'écrits, Théo joue X^{2k} ; sinon il joue X^{2k+2}

Supposons que si Théo joue ainsi, Benoît a une stratégie gagnante. On note k le nombre minimum de tours nécessaires à Benoît pour gagner. Notons également $i_1, \ldots, i_k$ les degrés des monômes ajoutés par Benoît pour gagner en k tours, P le polynôme obtenu à la fin et x un réel tel que $P(x) < 0$. Si un des i_j est pair, alors lors du tour correspondant, à eux deux, Benoît et Théo ont ajouté $2X^{i_j}$ au polynôme écrit. Si Benoît emploie la même stratégie en enlevant ce tour, il obtient le polynôme $P - 2X^{i_j}$ et $P(x) - 2x^{i_j} \leqslant P(x) < 0$, ce qui contredit la minimalité de k. Ainsi tous les i_j sont impairs.

Supposons qu'il existe un nombre impair a présent plusieurs fois dans la suite $(i_n)_{1 \leqslant n \leqslant k}$. Notons $j < j'$ les deux plus petits indices tels que $i_j = i_{j'} = a$. Lors des étapes j et j', Benoît et Théo ont ajouté en tout le polynôme $X^{a-1} + 2X^a + X^{a+1}$ au polynôme. Si Benoît emploie la même stratégie en enlevant ces deux tours, il obtient le polynôme $P - (X^{a-1} + 2X^a + X^{a+1})$ qui vérifie, d'après la remarque précédente, $P(x) - (x^{a-1} + 2x^a + x^{a+1}) \leqslant P(x) < 0$ ce qui contredit la minimalité de k.

Ainsi les $(i_j)_{1 \leqslant j \leqslant k}$ sont des nombres impairs deux à deux distincts. On note $2a_1 + 1 < \cdots < 2a_k + 1$ les $(i_j)_{1 \leqslant j \leqslant k}$ rangés par ordre croissant. Le polynôme P obtenu est $\sum_{i=1}^{k} (X^{2a_i} + X^{2a_i+1}) + X^{2020} = \sum_{i=1}^{k} X^{2a_i}(X + 1) + X^{2020}$. Ainsi si $x \geqslant -1$, on a bien $P(x) \geqslant 0$ car $x^{2a_i} \geqslant 0$ pour tout i contradiction.

On a donc $x < -1$, notons que $P = X^{2a_1} + \sum_{i=1}^{k-1} (X^{2a_i+1} + X^{2a_{i+1}}) + (X^{2a_k+1} + X^{2020})$. Posons $a_{k+1} = 1010$, pour aboutir à une contradiction et montrer que $P(x) \geqslant 0$, il suffit de montrer que $x^{2a_i+1} + x^{2a_{i+1}} \geqslant 0$ pour tout i. L'inégalité précédente est vraie car $x^{2a_i+1} + x^{2a_{i+1}} = x^{2a_{i+1}}(1 + x^{2a_i+1-2a_{i+1}}) \geqslant 0$. En effet, comme $a_i < a_{i+1}$, on a bien $a_{i+1} \geqslant a_i + 1$. On en déduit que $2a_i + 1 - 2a_{i+1} < 0$ donc que $1 > (1 + x^{2a_i+1-2a_{i+1}}) > 0$.
Dans tous les cas on aboutit à une absurdité : la stratégie de Théo est donc bien une stratégie gagnante.

Exercice 17. Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tous réels a, b :

$$f(a+2f(a)f(b)) = f(a)+2af(b).$$

Solution de l'exercice 17 Soit f une fonction qui vérifie l'équation.

Notons que $f = 0$ est solution. Supposons maintenant que f n'est pas identiquement nulle. Ainsi il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) \neq 0$.
Supposons qu'il existe un antécédent de 0 et notons α un tel antécédent. Pour $a = \alpha$ et $b = z$, on obtient $f(\alpha+2\cdot 0f(z)) = f(\alpha)+2\alpha f(z)$. On a ainsi $f(\alpha) = 0 = 2\alpha f(z)$, donc $\alpha = 0$. Ainsi, s'il existe, l'unique antécédent de 0 par f est 0.
On considère l'équation initiale en $a = b = -\frac{1}{2}$: $f(-\frac{1}{2}+2f(-\frac{1}{2})^2) = f(-\frac{1}{2}) - f(-\frac{1}{2}) = 0$. Par ce qui précède on a donc $-\dfrac{1}{2}+2f(-\frac{1}{2})^2 = 0$, soit $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \pm\dfrac{1}{2}$.
Notons que si f est solution, $-f$ aussi. Quitte à considérer $-f$, on suppose $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$.
Pour $a = -\dfrac{1}{2}$ et en $b = x \in \mathbb{R}$ quelconque, on obtient $f(-\frac{1}{2}-f(x)) = -\frac{1}{2}-f(x)$
Pour $a = -\dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{1}{2}-f(x)$, on a $f(f(x)) = f(x)$.
Pour $x, y \in \mathbb{R}$, en prenant $a = f(x)$ et $b = -\dfrac{1}{2}-f(y)$, on obtient $f(-2f(x)f(y)) = -2f(x)f(y)$.
Ainsi, si on a deux éléments c et d appartenant à l'image de f, $-2cd$ appartient aussi à l'image de f.
Soit $g \neq 0$ dans l'image de f, pour $a = \dfrac{1}{4g}$ et $b = -2f(\frac{1}{4g})g$. On sait que b est un point fixe de f d'après l'égalité précédente. On a donc $f(\frac{1}{4g}-4gf(\frac{1}{4g})^2) = f(\frac{1}{4g})-4\frac{1}{4g}f(\frac{1}{4g})g = 0$ donc $\frac{1}{4g}-4gf(\frac{1}{4g})^2 = 0$. On déduit de cela que $-2f(\frac{1}{4g})^2 = 0 = \frac{-1}{8g^2}$ est dans l'image de f. Comme g est dans l'image de f, $\frac{(-2)\times(-1)}{8g^2}\times g = \frac{1}{4g}$ est aussi dans l'image de f. Ainsi si h est un élément de l'image de f, $\frac{-h}{2g}$ est dans l'image de f.
Enfin pour x un réel non nul, pour $a = x$ et $b = -2f(x)f(z)$ on obtient

$$f(x-4f(x)^2f(z)) = f(x)-4xf(x)f(z)$$

ce qui donne $\dfrac{f(x-4f(x)^2f(z))}{f(x)} = 1-4xf(z)$
En divisant par -2, on obtient que

$$2xf(z)-\frac{1}{2} = \frac{f(x-4f(x)^2f(z))}{-2f(x)}$$

est dans l'image de f.

Or $f(z)$ est non nul donc $2xf(z)-\dfrac{1}{2}$ prend toutes les valeurs possibles dans $\mathbb{R}$ lorsque x parcourt $\mathbb{R}$. L'image de f est donc $\mathbb{R}$.
Or on avait pour x quelconque $f(f(x)) = f(x)$, donc f est l'identité.
En particulier si f est solution, f est l'identité ou moins l'identité, ou la fonction nulle.
On vérifie facilement que les trois fonctions trouvées (la fonction nulle, la fonction identité et la fonction moins l'identité) sont bien solution de l'équation, ce sont donc les seules.

Exercice 18. On dit qu'un ensemble A de polynômes à coefficients réels est magnifique si, lorsque P et Q sont deux éléments distincts de A, il existe des entiers positifs $a_1 > \cdots > a_{2020}$ tels que

$$PQ = \sum_{i=1}^{2020} iX^{a_i}.$$

Quel est le cardinal maximal d'un ensemble magnifique ?

<u>*Solution de l'exercice 18*</u> Soit A un ensemble magnifique. Supposons que A admet 3 éléments distincts, qu'on note P, Q, R.
Comme $P^2 = \frac{(PQ)\times(PR)}{QR}$, P^2 est le produit de deux polynômes à coefficients entiers unitaires, divisé par un polynôme à coefficient entier unitaire. C'est donc un polynôme à coefficients rationnels qui est aussi unitaire. En effet, l'algorithme d'Euclide permettant de calculer le PGCD entre deux polynômes à coefficients rationnels donne un quotient et un reste à coefficients rationnels, car l'ensemble des rationnels est stable par division multiplication, somme et différence.
Ainsi P^2 est un polynôme unitaire à coefficients rationnels. Notons $P = \sum_{n=0}^{d} a_n X^n$ avec $a_d \neq 0$. On a $a_d^2 = 1$, donc $a_d = \pm 1$. Montrons par récurrence descendante forte que a_i est rationnel pour tout i entre 0 et n.
L'initialisation vient du fait que $a_n = \pm 1$. Pour l'hérédité, soit $i \in \{0, n-1\}$ tel que $a_{i+1}, \ldots, a_n$ sont rationnels. Le coefficient de degré $i+n$ de P^2 vaut $\sum\limits_{j=i}^{n} a_j a_{n+i-j} = 2a_i a_n + \sum\limits_{j=i+1}^{n-1} a_j a_{n+i-j}$.

Or, si $i+1 \leqslant j \leqslant n-1$, a_j et a_{n+i-j} sont rationnels, on en déduit que $\sum\limits_{j=i+1}^{n-1} a_j a_{n+i-j}$ est rationnel.

Comme le coefficient de degré $i+n$ de P^2 est rationnel, $2a_i a_n$ est aussi rationnel. Ainsi comme $a_n = \pm 1$, a_i est rationnel, ce qui conclut la récurrence.

Or $P^2(1) = 1 + \cdots + 2020 = \frac{2020\times 2021}{2} = 1010 \times 2021$ qui est divisible par 2 mais pas par 4. En particulier, comme P_i est à coefficients rationnels, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $P(1) = \dfrac{p}{q}$. On a donc $p^2 = 1010 \times 2021 \times q^2$. On obtient que $p \neq 0$, et que $V_2(p^2) = 2V_2(p) = V_2(1010 \times 2021 \times q^2) = 1 + 2V_2(q)$. On en conclut que $2V_2(p) = 2V_2(q) + 1$. Comme le terme de gauche est pair et celui de droite impair, on obtient une contradiction.

Ainsi on ne peut avoir $|A| \geqslant 3$. Par contre, on peut avoir $|A| = 2$ en prenant $A = \{1, \sum\limits_{i=1}^{2019} iX^{2019-i}\}$ qui convient bien. On en déduit que le cardinal maximal d'un ensemble magnifique est 2.