PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 6 JANVIER 2021

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2006 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2005 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire (au moins) une figure pertinente sur une feuille séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, si l'on souhaite démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.
- Si l'élève ne respecte pas la consigne précédente, il perdra automatiquement un point à l'exercice concerné (on ne donne pas de note strictement négative).

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique via le formulaire de dépôt disponible à l'adresse suivante :

`http://igm.univ-mlv.fr/~juge/pofm/form/`

Problèmes Junior

Exercice 1. On pose $n = 2021$. Démontrer que le nombre $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 35.

Solution de l'exercice 1 Nous allons démontrer que le nombre $S_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible simultanément par 5 et par 7 lorsque $n = 2021$.
On vérifie immédiatement que

$$S_n \equiv 9^n \times 3 + 2^n \times 4 \equiv 2^n \times 3 + 2^n \times 4 \equiv 2^n \times 7 \equiv 0 \pmod 7,$$

ce qui signifie bien que S_n est divisible par 7.
On vérifie ensuite que

$$S_n \equiv 9^n \times 3 + 2^n \times 4 \equiv (-1)^n \times 3 + 2^n \times (-1) \equiv -3 - 2^n \pmod 5.$$

La propriété demandée dépend donc manifestement de la valeur de n, puisqu'elle aurait été invalide si on avait choisi $n = 3$.
On calcule donc les premières valeurs de $S_n \pmod 5$ pour se donner des idées :

- ▷ $S_0 \equiv -3 - 1 \equiv 1 \pmod 5$;
- ▷ $S_1 \equiv -3 - 2 \equiv 0 \pmod 5$;
- ▷ $S_2 \equiv -3 - 4 \equiv 3 \pmod 5$;
- ▷ $S_3 \equiv -3 - 8 \equiv 4 \pmod 5$;
- ▷ $S_4 \equiv -3 - 16 \equiv 1 \pmod 5$;
- ▷ $S_5 \equiv -3 - 32 \equiv 0 \pmod 5$;
- ▷ $S_6 \equiv -3 - 64 \equiv 3 \pmod 5$;
- ▷ $S_7 \equiv -3 - 128 \equiv 4 \pmod 5$.

Il apparaît visiblement que $S_n \equiv 0 \pmod 5$ lorsque $n \equiv 1 \pmod 4$, et on entreprend donc de le démontrer. Si l'on pose $n = 4k + 1$, alors

$$S_n \equiv -3 - 2^{4k+1} \equiv -3 - 16^k \times 2 \equiv -3 - 1^k \times 2 \equiv -3 - 2 \equiv 0 \pmod 5.$$

Ainsi, lorsque $n = 2021$, on a bien $n \equiv 1 \pmod 4$, et l'entier S_n est donc divisible par 5.
En conclusion, l'entier S_n est divisible à la fois par 5 et par 7, donc il est également divisible par leur PPCM, c'est-à-dire 35.

Solution alternative n°1 Le petit théorème de Fermat nous assure que $2^4 \equiv 3^4 \equiv 1 \pmod 5$. Comme $2n + 1 \equiv 4043 \equiv 3 \pmod 4$ et $n + 2 \equiv 2023 \equiv 3 \pmod 4$, on en déduit que $S_n \equiv 3^3 + 2^3 \equiv 35 \equiv 0 \pmod 5$.
De même, le petit théorème de Fermat nous assure que $2^6 \equiv 3^6 \equiv 1 \pmod 7$. Comme $2n+1 \equiv 4043 \equiv -1 \pmod 6$ et $n + 2 \equiv 2023 \equiv 1 \pmod 6$, on en déduit que $S_n \equiv 3^5 + 2^1 \equiv 245 \equiv 0 \pmod 7$.
En conclusion, la somme S_n est divisible par 5 et par 7, donc par 35.

Commentaire des correcteurs Cet exercice a été globalement bien réussi, à la grande satisfaction des correcteurs. La plupart des élèves ont eu bonnes idées et de bons réflexes :

- ▷ se ramener à étudier la divisibilité de S_n par 5 et par 7 ;
- ▷ étudier les petites valeurs de n ;
- ▷ considérer séparément les puissances de 2 et de 3 et étudier leur chiffre des unités, c'est-à-dire leur congruence modulo 10 ;
- ▷ repérer qu'un motif se répétait.

Il s'agit là de signes très encourageants !

Certains élèves ont aussi invoqué directement le petit théorème de Fermat, qui stipule que $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ quand p est un nombre premier qui ne divise pas a. Ce résultat permettait d'aboutir plus rapidement à la solution, et avait aussi le bon goût de rendre les divisibilités par 5 et par 7 symétriques.

Néanmoins, les correcteurs ont également repéré plusieurs erreurs, mathématiques ou stratégiques, qu'ils tiennent à souligner pour éviter aux élèves de les commettre à nouveau. Voici, tout d'abord, les erreurs mathématiques les plus fréquentes :

- ▷ Plusieurs élèves se sont trompés en manipulant les puissances, et ont écrit, à tort, des égalités de la forme $a^k + b^\ell = (a + b)^{k+\ell}$. Quand on « invente » une telle identité algébrique, il y a de fortes chances qu'elle soit fausse, et une étape très importante est donc de rechercher des contre-exemples éventuels : si on n'en trouve pas, on aura davantage confiance en notre identité. Ici, prendre $a = b = k = \ell = 1$ suffit à confirmer que $a^k + b^\ell = 1 + 1 = 2 \neq 4 = 2^2 = (a + b)^{k+\ell}$.
- ▷ Plusieurs élèves ont cru à tort que l'on pouvait réduire les exposants modulo m. Certes, si $a \equiv b \pmod{m}$, on a bien $a + c \equiv b + c \pmod{m}$ et $ac \equiv bc \pmod{m}$ pour tout c. En revanche, en général, $c^a \not\equiv c^b \pmod{m}$. C'est le cas, par exemple, quand $a = 1$, $b = 4$, $c = 2$ et $m = 3$, puisque alors $c^a \equiv 2^1 \equiv 2 \not\equiv 16 \equiv 2^4 \equiv c^b \pmod{m}$.
- ▷ Plusieurs élèves ont affirmé, à tort, qu'un nombre est divisible par 7 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 7. Ce critère de divisibilité est manifestement incorrect, puisque 100 et 700 ont les mêmes derniers chiffres mais que seul 700 est divisible par 7. En outre, si un tel critère existait, et au vu de sa simplicité, il serait certainement enseigné à l'école, ce qui n'est pas le cas.
- ▷ De nombreux élèves ont confondu conditions nécessaires et suffisantes. Ils ont ainsi affirmé que « si S_n est divisible par $35 = 5 \times 7$ », il est aussi divisible par 5 et par 7 ». Cette information est certes vraie, mais elle nous est aussi inutile. On attendait des élèves qu'ils formulent l'implication réciproque, qui est d'ailleurs celle qu'ils ont utilisée : « si S_n est divisible par 5 et par 7, il est aussi divisible par $35 = 5 \times 7$ ».

Voici, ensuite, les erreurs stratégiques les plus fréquentes :

- ▷ Plusieurs élèves ont cru, en s'appuyant sur un raisonnement faux ou sur une erreur de calcul, démontrer que 35 ne divisait pas S_n. Dans pareil cas, au lieu de conclure au fait que l'énoncé était incorrect, il aurait été plus judicieux de se remettre d'abord en question, et revérifiant les calculs effectués et la correction des arguments invoqués.
- ▷ De nombreux élèves, après avoir étudié le chiffre des unités de 2^n et 3^n pour en déduire que 5 divisait S_n, n'ont pas pensé à prendre du recul pour se dire qu'il suffisait de faire la même chose mais en écrivant tous nos nombres en base 7 plutôt qu'en base 10. De manière générale, quand on découpe un problème en deux sous-problèmes d'apparences analogues et que l'on résout un des deux sous-problèmes, il est très utile de prendre le temps de réfléchir à la façon dont on pourrait adapter le raisonnement utilisé pour résoudre l'autre sous-problème.
- ▷ De nombreux élèves, après avoir repéré que les chiffres des unités de 2^n semblaient se répéter en formant le cycle $2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, \ldots$, ont affirmé que c'était le cas sans essayer de le démontrer. Au lieu d'une démonstration, ils se sont donc appuyés sur une simple conjecture. Puisque cette conjecture tenait un rôle central dans leur solution, il était cependant indispensable de la démontrer.

  Les correcteurs ont ici décidé de ne pas pénaliser l'absence de cette démonstration, car il s'agissait du premier test POFM en temps limité de leur vie pour la plupart des candidats.

Cependant, en d'autres circonstances, omettre cette démonstration aurait pu être assez lourdement sanctionné, à hauteur de 2 ou 3 points sur 7.

Exercice 2. Soit n et k deux entiers, tels que $n \geqslant 3$. Théo organise les élections des délégués de sa classe de n élèves : chaque élève doit voter pour un de ses camarades (tout le monde est candidat), et nul ne vote pour lui-même. Puis Théo répartit les élèves en groupes de sorte que, si un élève est dans un groupe, l'élève pour lequel il a voté n'y soit pas.

Pour quelles valeurs de k Théo est-il sûr de pouvoir répartir les élèves en au plus k groupes, et ce quelle que soit la manière dont les élèves auront voté ?

Solution de l'exercice 2 Tout d'abord, si on a trois élèves (disons Anna, Martin et Vincent) tels qu'Anna a voté pour Martin, Martin a voté pour Vincent, et Vincent a voté pour Anna, il est clair que Théo aura besoin d'au moins trois groupes.

Réciproquement, démontrons par récurrence sur n que Théo peut s'en sortir avec trois groupes seulement, et ce même si certains élèves votent blanc.

L'initialisation est claire pour $n = 3$. On suppose donc que $n \geqslant 4$. Puisqu'il y a eu au plus n votes, il y a au moins un élève qui a reçu au plus un vote : on l'appelle Donald. Quitte à oublier Donald et à frauder en « oubliant » le vote que celui-ci aurait reçu pour le remplacer par un vote blanc, Théo peut répartir les $n - 1$ élèves restants en au plus trois groupes.

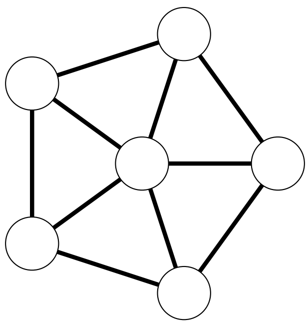
Puis Théo fait revenir Donald dans la classe : sur les trois groupes, il y en a au moins un qui ne contient ni la personne pour laquelle Donald a pu voter, ni l'électeur éventuel de Donald. Théo met alors Donald dans ce groupe-là, ce qui conclut la récurrence.

En résumé, les entiers recherchés sont les entiers $k \geqslant 3$.

Commentaire des correcteurs Beaucoup d'élèves ont bien compris que certains cas forçaient Théo à choisir $k \geqslant 3$. Il fallait alors, pour tout n, donner un exemple de vote pour lequel 3 groupes étaient nécessaires.

Par la suite, de nombreuses stratégies pour répartir les élèves en 3 groupes ont été proposées, mais peu étaient correctes. Dans un tel cas, essayer de prouver que la répartition convient est toujours utile : en effet, soit la répartition est correcte, et alors démontrer qu'elle l'est est nécessaire pour obtenir tous les points ; soit elle ne l'est pas, et échouer dans cette tentative de preuve permet souvent de comprendre pourquoi la stratégie échoue en fait. Il ne faut pas non plus hésiter à tester la répartition qui est donnée pour certains votes : en effet, cela permet souvent facilement de voir les problèmes.

Enfin, quelques élèves ont transformé le problème en un problème de coloriage de graphes, puis ont affirmé que, si l'on pouvait colorier toute partie de 4 sommets du graphe sans avoir deux sommets de même couleur adjacents, on pouvait colorier le graphe entier sans avoir deux sommets de même couleur adjacents. Cette affirmation est en fait invalide, comme l'illustre le contre-exemple ci-dessous. Afin d'éviter aux élèves ce genre de déconvenues, nous les encourageons encore une fois à tenter de fournir une vraie preuve des différents éléments qu'ils énoncent.



Exercice 3. On définit la suite $a_1, a_2, a_3 \ldots$ de la façon suivante : $a_1 = 63$ et, pour tout entier $n \geqslant 2$, a_n est le plus petit multiple de n qui soit supérieur ou égal à a_{n-1}. Démontrer que les termes de notre suite sont deux à deux distincts.

Solution de l'exercice 3 Il est clair que la suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante. Il s'agit donc de démontrer qu'elle est strictement croissante.

On calcule donc les premiers termes de la suite : $a_1 = 63$, $a_2 = 64$, $a_3 = 66$, $a_4 = 68$, $a_5 = 70$, $a_6 = 72$, $a_7 = 77$, $a_8 = 80$, $a_9 = 81$, $a_{10} = 90$, $a_{11} = 99$, $a_{12} = 108$, $a_{13} = 117 \ldots$

Une propriété se dessine alors sous nos yeux : il semble que $a_n = 9n$ pour tout $n \geqslant 9$. En pratique, il est bon de vérifier cette conjecture sur quelques valeurs supplémentaires de n, pour se convaincre qu'elle est vraie. On entreprend donc de démontrer cette propriété par récurrence.

Tout d'abord, comme mentionné ci-dessus, on a bien $a_9 = 9^2$. Puis, pour tout entier $n \geqslant 9$ tel que $a_n = 9n$, on constate que $8(n+1) = a_n - (n-8) < a_n < 9(n+1)$, de sorte que $a_{n+1} = 9(n+1)$.

En conclusion, la suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ est strictement croissante tant que $n \leqslant 9$, et elle l'est manifestement quand $n \geqslant 9$. Ses termes sont donc en effet distincts deux à deux.

Solution alternative n°1 Comme dans la solution précédente, il est clair que la suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante. Il s'agit donc de démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que $a_n \neq a_{n+1}$, c'est-à-dire que $n(n+1)$ ne divise pas a_n.

On calcule alors les premiers termes de la suite, jusqu'à $a_9 = 81$, et l'on constate bien que $n(n+1)$ ne divise pas a_n lorsque $n \leqslant 9$. On démontre ensuite que $a_n < n(n+1)$ pour tout entier $n \geqslant 9$.

En effet, c'est bien le cas si $n = 9$. Puis, pour tout entier $n \geqslant 9$ tel que $a_n < n(n+1)$, on constate que $a_{n+1} \leqslant a_n + n < n(n+2) < (n+1)^2$, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs De nombreux élèves ont eu des idées intéressantes et leur permettant d'avancer dans la résolution de ce problème pourtant difficile. Face à un tel énoncé, il est important de regarder comment la suite (a_n) se comporte, et donc en calculer les premiers termes : on peut essayer de regarder les 10 ou 20 premiers termes pour se faire une idée de la suite. Cette idée s'avérait particulièrement fructueuse ici, puisqu'elle permettait de conjecturer que $a_n = 9n$ lorsque $n \geqslant 9$, ce qui semble a priori plus facile à prouver que l'énoncé initial.

Néanmoins, attention à la rédaction ! Les élèves qui ont entamé une récurrence on souvent écrit que $a_n = 9n$ puisque $a_{n+1} = k(n+1)$ pour un certain k, et ont ensuite tenté de trouver k, mais ont uniquement démontré que $k \leqslant 9$ ou que $k \geqslant 9$, oubliant l'autre inégalité : il est important de bien justifier pourquoi $k = 9$.

Par ailleurs, dans cet exercice, il était possible de remarquer empiriquement que $a_n = 9n$ lorsque $n \geqslant 9$, mais sans parvenir à le démontrer. Dans ce cas, il faut évidemment mentionner une telle conjecture, puis voir comment on pourrait l'utiliser pour résoudre l'exercice. En effet, plus le raisonnement est complet et moins il manque d'éléments à justifier, et plus il vaudra de points. Admettre un résultat coûte évidemment des points (et si le résultat que l'on admet est aussi difficile à démontrer que l'énoncé initial, cela peut même coûter l'intégralité des points), mais il est souvent possible de formuler une conjecture puis d'en déduire le résultat désiré.

Exercice 4. Soit $P_1P_2\dots P_{2021}$ un polygone convexe à 2021 sommets tel que, pour chaque sommet P_i, les 2018 diagonales issues de P_i divisent l'angle $\widehat{P_i}$ en 2019 angles égaux.

Démontrer que $P_1P_2\dots P_{2021}$ est un polygone régulier, c'est-à-dire un polygone dont tous les angles ont même mesure et tous les côtés ont même longueur.

Solution de l'exercice 4

Dans la suite, on pose $n = 2019$ et, pour tout sommet P_i, on note a_i l'angle $\widehat{P_i}/n$. Soit alors P_k, P_{k+1}, P_{k+2}, P_{k+3} et P_{k+4} quatre sommets consécutifs, les indices des sommets étant considérés modulo $n+2$.

La somme des angles d'un triangle vaut $180°$. En considérant respectivement les triangles $P_iP_{i+1}P_{i+2}$, $P_iP_{i+1}P_{i+3}$ et $P_iP_{i+1}P_{i+4}$, on constate que

$$a_i + na_{i+1} + a_{i+2} = 180° \qquad (1)$$
$$2a_i + (n-1)a_{i+1} + a_{i+3} = 180° \qquad (2)$$
$$3a_i + (n-2)a_{i+1} + a_{i+4} = 180° \qquad (3)$$

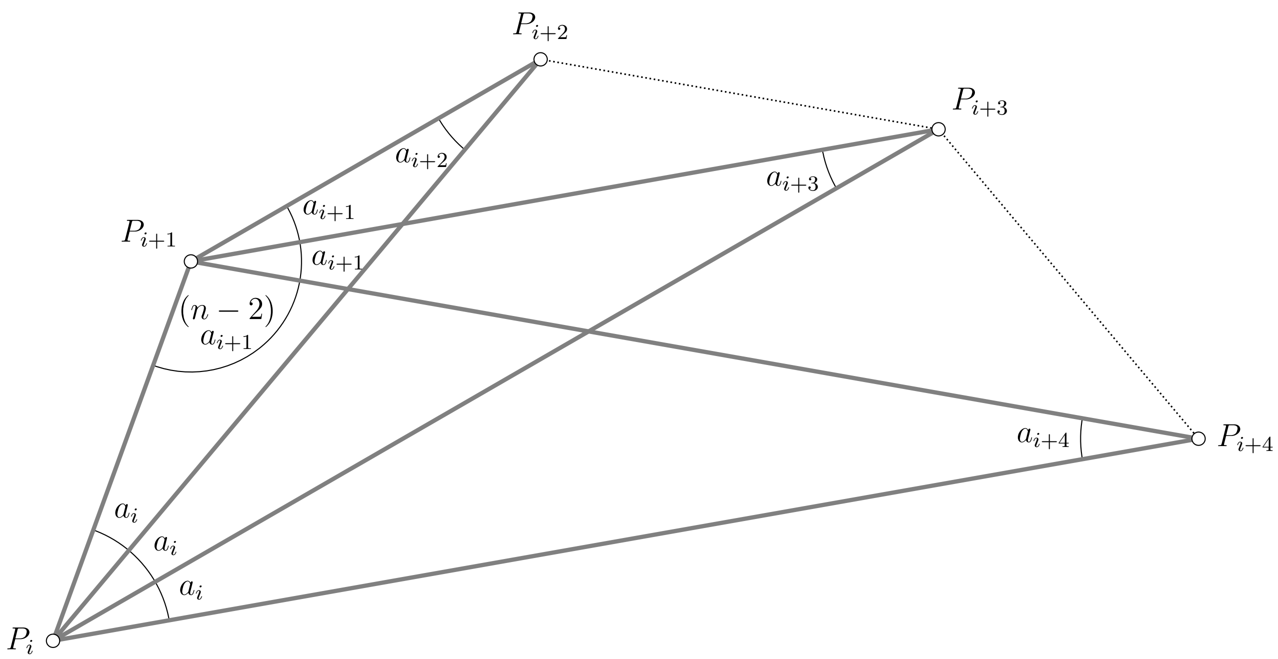
Nous allons alors soustraire deux à deux ces équations :

- ▷ (1) − (2) indique que $a_{i+1} + a_{i+2} = a_i + a_{i+3}$, c'est-à-dire que $a_{i+1} - a_i = a_{i+3} - a_{i+2}$;
- ▷ (2) − (3) indique que $a_{i+1} + a_{i+3} = a_i + a_{i+4}$, c'est-à-dire que $a_{i+1} - a_i = a_{i+4} - a_{i+3}$.

On constate donc que $a_{i+4} - a_{i+3} = a_{i+3} - a_{i+2}$. La différence entre deux angles a_j et a_{j+1} consécutifs est donc égale à une constante $\mathbf{c}$.

Cela signifie que $a_{i+k} = a_i + k\mathbf{c}$ pour tous les entiers i et k. En particulier, $a_1 = a_{n+3} = a_1 + (n+2)\mathbf{c}$, donc $\mathbf{c} = 0°$. Ainsi, notre polygone a tous ses sommets égaux.

Le triangle $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ est donc isocèle en P_{i+1}, de sorte que $P_iP_{i+1} = P_{i+1}P_{i+2}$. Deux côtés consécutifs étant de même longueur, notre polygone a donc tous ses côtés de même longueur, et il s'agit bien d'un polygone régulier.



Solution alternative n°1 Comme dans la solution précédente, on démontre les égalités (1) et (2) pour en déduire que $a_{i+1} - a_i = a_{i+3} - a_{i+2}$. Si l'on pose $\mathbf{c} = a_2 - a_1$, une récurrence immédiate démontre alors que $a_{2k} - a_{2k-1} = \mathbf{c}$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

Or, nos indices sont considérés modulo $n + 2 = 2021$, qui est impair. On en déduit que $a_{i+1} - a_i = \mathbf{c}$ pour tout indice i. On conclut alors comme précédemment.

Solution alternative n°2 Comme précédemment, on démontre l'égalité (1). Si l'on pose $b_i = a_i - 180°/(n+2)$, cette égalité se réécrit comme $b_i + nb_{i+1} + b_{i+2} = 0$.

La suite $(b_i)_{i \geqslant 1}$ est donc récurrente linéaire. Si l'on note r_+ et r_- les deux racines du polynôme $1 + nX + X^2$, c'est-à-dire

$$r_\pm = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 - 4}}{2},$$

il existe donc deux nombres λ_+ et λ_- tels que

$$b_i = \lambda_+ r_+^i + \lambda_- r_-^i$$

pour tout $i \geqslant 0$.

Puisque $n \geqslant 5$, on sait que

$$(n^2 - 4) - (n-2)^2 = 2(n-4) > 0,$$

donc que $r_- \leqslant -n/2 < -1 < r_+ < 0$ et que on sait que $|r_-| > 1 > |r_+|$. Par conséquent, on sait que, si $\lambda_- \neq 0$, la fraction $b_i/(\lambda_- r_-^i)$ tend vers 1 quand $i \to +\infty$. Or, la suite $(b_i)_{i \geqslant 1}$ est $(n+2)$-périodique. On en déduit que $\lambda_- = 0$.

De même, si $\lambda_+ \neq 0$, la fraction $b_i/(\lambda_+ r_+^i)$ tend vers 1 quand $i \to +\infty$, en contradiction avec le caractère $(n+2)$-périodique de la suite $(b_i)_{i \geqslant 1}$. On en déduit que $\lambda_+ = 0$, donc que $b_i = 0$ pour tout $i \geqslant 1$.

En conclusion, tous les angles a_i sont égaux, et on démontre comme précédemment que les côtés du polygone sont égaux eux aussi.

Solution alternative n°3 Comme précédemment, on démontre l'égalité (1). En écrivant cette égalité pour deux entiers i consécutifs, et en soustrayant les deux égalités obtenues, on constate que

$$a_i + (n-1)a_{i+1} - (n-1)a_{i+2} - a_{i+3} = 0.$$

La suite a_i est donc récurrente linéaire. Cette fois-ci, les racines du polynôme

$$1 + (n-1)X - (n-1)X^2 - X^3 = (1 - X)(1 + nX + X^2)$$

sont $r_\pm$ et 1. Puisque $n \geqslant 5$, on sait que

$$(n^2 - 4) - (n-2)^2 = 2(n-4) > 0,$$

donc que $r_- \leqslant -n/2 < -1 < r_+ < 0 < 1$ et que on sait que $|r_-| > 1 > |r_+|$.

Il existe donc trois nombres λ_+, λ_1 et λ_- tels que

$$a_i = \lambda_+ r_+^i + \lambda_1 + \lambda_- r_-^i$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$. On démontre comme dans la solution précédente que $\lambda_- = 0$. De même, si $\lambda_+ \neq 0$, alors $a_i/(\lambda_+ r_+^i) \to 1$ quand $i \to -\infty$, en contradiction avec le caractère périodique de (a_i). Ainsi, $\lambda_+ = 0$.[1]

1. On pourrait aussi considérer le caractère périodique de la suite $a_i - \lambda_1$, mais alors on retomberait dans la solution alternative n°2.

En conclusion, tous les angles a_i sont égaux à λ_1, et on démontre comme précédemment que les côtés du polygone sont égaux eux aussi.

Remarque : Cet exercice avait été proposé en 2003, aux Olympiades mathématiques de première, dans l'académie de Versailles, mais en incluant des questions intermédiaires. Sur les 623 candidats présents dans l'académie, dont deux lauréats nationaux, aucun n'était parvenu à résoudre cet exercice, qui s'était donc révélé particulièrement difficile bien qu'abordable avec peu d'outils techniques.

Commentaire des correcteurs L'exercice, difficile, n'a été complètement résolu que par très peu d'élèves. Un grand nombre d'élèves ont tout de même réussi à obtenir des points partiels en établissant des équations intéressantes entre les angles, ou bien en montrant que, si tous les angles du polygone étaient égaux, alors tous les côtés du polygone étaient également de même longueur.

Problèmes Senior

Exercice 5. Soit $P_1P_2\ldots P_{2021}$ un polygone convexe à 2021 sommets tel que, pour chaque sommet P_i, les 2018 diagonales issues de P_i divisent l'angle $\widehat{P_i}$ en 2019 angles égaux.

Démontrer que $P_1P_2\ldots P_{2021}$ est un polygone régulier, c'est-à-dire un polygone dont tous les angles ont même mesure et tous les côtés ont même longueur.

Solution de l'exercice 5

Dans la suite, on pose $n = 2019$ et, pour tout sommet P_i, on note a_i l'angle $\widehat{P_i}/n$. Soit alors P_k, P_{k+1}, P_{k+2}, P_{k+3} et P_{k+4} quatre sommets consécutifs, les indices des sommets étant considérés modulo $n+2$.

La somme des angles d'un triangle vaut $180°$. En considérant respectivement les triangles $P_iP_{i+1}P_{i+2}$, $P_iP_{i+1}P_{i+3}$ et $P_iP_{i+1}P_{i+4}$, on constate que

$$a_i + na_{i+1} + a_{i+2} = 180° \tag{1}$$
$$2a_i + (n-1)a_{i+1} + a_{i+3} = 180° \tag{2}$$
$$3a_i + (n-2)a_{i+1} + a_{i+4} = 180° \tag{3}$$

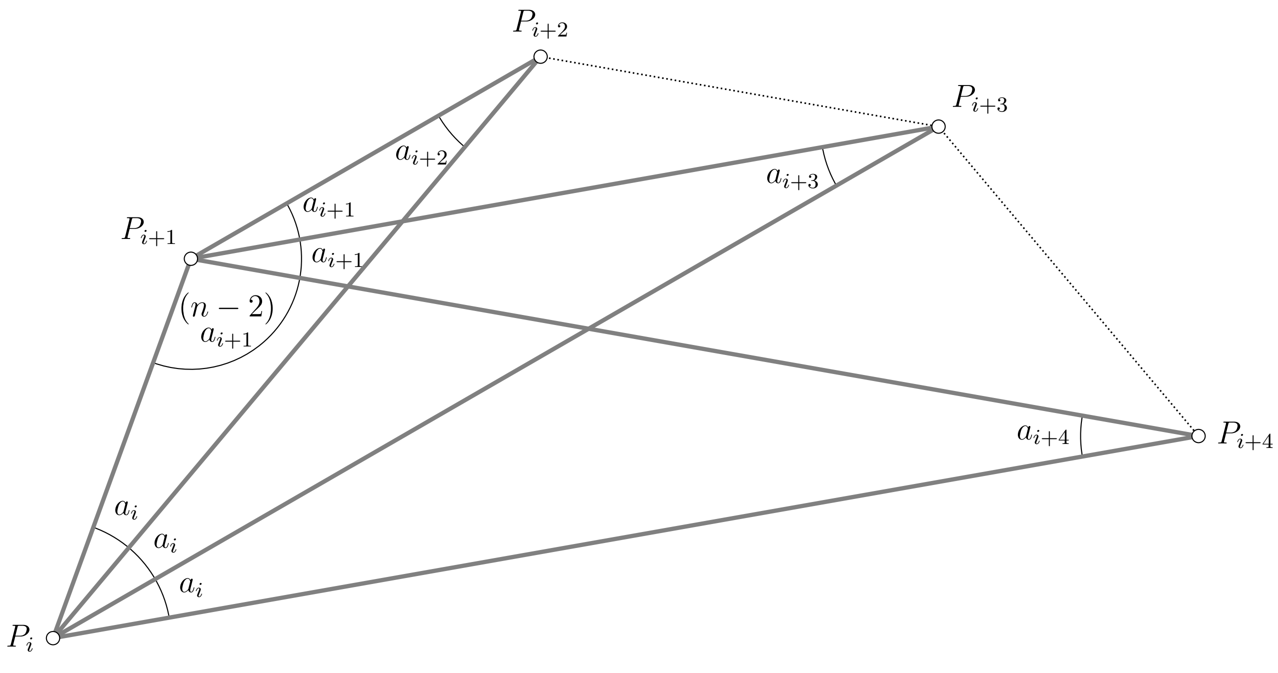
Nous allons alors soustraire deux à deux ces équations :

- ▷ (1) − (2) indique que $a_{i+1} + a_{i+2} = a_i + a_{i+3}$, c'est-à-dire que $a_{i+1} - a_i = a_{i+3} - a_{i+2}$;
- ▷ (2) − (3) indique que $a_{i+1} + a_{i+3} = a_i + a_{i+4}$, c'est-à-dire que $a_{i+1} - a_i = a_{i+4} - a_{i+3}$.

On constate donc que $a_{i+4} - a_{i+3} = a_{i+3} - a_{i+2}$. La différence entre deux angles a_j et a_{j+1} consécutifs est donc égale à une constante $\mathbf{c}$.

Cela signifie que $a_{i+k} = a_i + k\mathbf{c}$ pour tous les entiers i et k. En particulier, $a_1 = a_{n+3} = a_1 + (n+2)\mathbf{c}$, donc $\mathbf{c} = 0°$. Ainsi, notre polygone a tous ses sommets égaux.

Le triangle $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ est donc isocèle en P_{i+1}, de sorte que $P_iP_{i+1} = P_{i+1}P_{i+2}$. Deux côtés consécutifs étant de même longueur, notre polygone a donc tous ses côtés de même longueur, et il s'agit bien d'un polygone régulier.



Solution alternative n°1 Comme dans la solution précédente, on démontre les égalités (1) et (2) pour en déduire que $a_{i+1} - a_i = a_{i+3} - a_{i+2}$. Si l'on pose $\mathbf{c} = a_2 - a_1$, une récurrence immédiate démontre alors que $a_{2k} - a_{2k-1} = \mathbf{c}$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

Or, nos indices sont considérés modulo $n + 2 = 2021$, qui est impair. On en déduit que $a_{i+1} - a_i = \mathbf{c}$ pour tout indice i. On conclut alors comme précédemment.

Solution alternative n°2 Comme précédemment, on démontre l'égalité (1). Si l'on pose $b_i = a_i - 180°/(n+2)$, cette égalité se réécrit comme $b_i + nb_{i+1} + b_{i+2} = 0$.

La suite $(b_i)_{i \geqslant 1}$ est donc récurrente linéaire. Si l'on note r_+ et r_- les deux racines du polynôme $1 + nX + X^2$, c'est-à-dire

$$r_\pm = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 - 4}}{2},$$

il existe donc deux nombres λ_+ et λ_- tels que

$$b_i = \lambda_+ r_+^i + \lambda_- r_-^i$$

pour tout $i \geqslant 0$.

Puisque $n \geqslant 5$, on sait que

$$(n^2 - 4) - (n-2)^2 = 2(n-4) > 0,$$

donc que $r_- \leqslant -n/2 < -1 < r_+ < 0$ et que on sait que $|r_-| > 1 > |r_+|$. Par conséquent, on sait que, si $\lambda_- \neq 0$, la fraction $b_i/(\lambda_- r_-^i)$ tend vers 1 quand $i \to +\infty$. Or, la suite $(b_i)_{i \geqslant 1}$ est $(n+2)$-périodique. On en déduit que $\lambda_- = 0$.

De même, si $\lambda_+ \neq 0$, la fraction $b_i/(\lambda_+ r_+^i)$ tend vers 1 quand $i \to +\infty$, en contradiction avec le caractère $(n+2)$-périodique de la suite $(b_i)_{i \geqslant 1}$. On en déduit que $\lambda_+ = 0$, donc que $b_i = 0$ pour tout $i \geqslant 1$.

En conclusion, tous les angles a_i sont égaux, et on démontre comme précédemment que les côtés du polygone sont égaux eux aussi.

Solution alternative n°3 Comme précédemment, on démontre l'égalité (1). En écrivant cette égalité pour deux entiers i consécutifs, et en soustrayant les deux égalités obtenues, on constate que

$$a_i + (n-1)a_{i+1} - (n-1)a_{i+2} - a_{i+3} = 0.$$

La suite a_i est donc récurrente linéaire. Cette fois-ci, les racines du polynôme

$$1 + (n-1)X - (n-1)X^2 - X^3 = (1 - X)(1 + nX + X^2)$$

sont $r_\pm$ et 1. Puisque $n \geqslant 5$, on sait que

$$(n^2 - 4) - (n-2)^2 = 2(n-4) > 0,$$

donc que $r_- \leqslant -n/2 < -1 < r_+ < 0 < 1$ et que on sait que $|r_-| > 1 > |r_+|$.

Il existe donc trois nombres λ_+, λ_1 et λ_- tels que

$$a_i = \lambda_+ r_+^i + \lambda_1 + \lambda_- r_-^i$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$. On démontre comme dans la solution précédente que $\lambda_- = 0$. De même, si $\lambda_+ \neq 0$, alors $a_i/(\lambda_+ r_+^i) \to 1$ quand $i \to -\infty$, en contradiction avec le caractère périodique de (a_i). Ainsi, $\lambda_+ = 0$.[2]

2. On pourrait aussi considérer le caractère périodique de la suite $a_i - \lambda_1$, mais alors on retomberait dans la solution alternative n°2.

En conclusion, tous les angles a_i sont égaux à λ_1, et on démontre comme précédemment que les côtés du polygone sont égaux eux aussi.

Remarque : Cet exercice avait été proposé en 2003, aux Olympiades mathématiques de première, dans l'académie de Versailles, mais en incluant des questions intermédiaires. Sur les 623 candidats présents dans l'académie, dont deux lauréats nationaux, aucun n'était parvenu à résoudre cet exercice, qui s'était donc révélé particulièrement difficile bien qu'abordable avec peu d'outils techniques.

Commentaire des correcteurs L'exercice a été résolu par un grand nombre d'élèves. Pratiquement tous les élèves ont su obtenir au moins des points partiels en établissant des équations intéressantes entre les angles associés à deux ou trois sommets consécutifs. Voici cependant plusieurs erreurs rencontrées fréquemment :

- ▷ Une partie non négligeable des élèves s'arrête après avoir montré que tous les angles sont égaux. Cela ne suffit pourtant pas à montrer que le polygone est régulier, puisqu'il faut aussi montrer que toutes les longueurs sont égales.
- ▷ Quelques élèves ont donné le raisonnement suivant : ils partent de la configuration du polygone régulier et montrent qu'il n'est pas possible, en bougeant les sommets à partir de cette configuration de manière à respecter l'hypothèse de l'énoncé, d'obtenir un autre polygone respectant la condition. Cependant ce raisonnement repose sur des hypothèses de continuité qui n'ont aucune raison d'être, et ne permet donc pas de montrer qu'il n'existe pas d'autres polygones respectant la propriété donnée par l'énoncé. Bien souvent, les transformations proposées ne permettent pas de passer du carré au losange non carré, alors que les deux quadrilatères respectent la condition de l'énoncé.
- ▷ Beaucoup d'élèves se contentent de traiter le cas du pentagone au lieu du 2021-gone et disent qu'on étend aisément le résultat pour le cas du 2021-gone. Si une grande partie de leurs raisonnement est effectivement utilisable pour la résolution du cas $n = 2021$, l'un des aspects du problème est justement d'être capable de généraliser complètement le raisonnement sur des petits polygones. Il fallait donc, pour être parfaitement convaincant, effectuer de nouveau la preuve dans le cas général. En effet, bien souvent, le raisonnement sur le pentagone produisait des équations reliant les angles entre eux qui étaient beaucoup plus simples que le cas général.
- ▷ Quelques élèves se contentent de signaler qu'il y a beaucoup d'équations entre les angles et qu'on a donc un système avec 2021 équations à 2021 inconnues, avant d'affirmer qu'un tel système admet toujours une unique solution (ici, la solution constante). Mais il fallait alors préciser les 2021 équations mises en jeu (trop d'élèves ne font que signaler qu'il y a bien plus que 2021 équations) et montrer que ces équations étaient indépendantes les unes des autres. Le fait qu'un système linéaire de 2021 équations à 2021 inconnues admet une unique solution n'est vrai que dans ce cadre.

  D'autres élèves, après avoir énoncé le système, affirment que « après calculs », l'unique solution est donnée par des angles tous égaux. Mais cette affirmation est loin d'être convaincante sans les calculs à l'appui.

Exercice 6. Les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont définies par

$$\begin{cases} a_n = 0 & \text{si } n = 0\,; \\ a_n = 2a_{\lfloor n/2 \rfloor} + n & \text{si } n \geqslant 1\,; \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_n = 0 & \text{si } n = 0\,; \\ b_n = 3b_{\lfloor n/3 \rfloor} + n & \text{si } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Démontrer que la suite de terme général $2^{a_n} - 3^{b_n}$ change de signe infiniment souvent.

Solution de l'exercice 6 On montre tout d'abord, par récurrence sur n, que $a_n \leqslant n\lfloor \log_2(2n) \rfloor$ pour tout entier $n \geqslant 1$, avec égalité lorsque n est une puissance de 2. En effet, pour $n = 1$, on a bien $a_n = 1 = n\log_2(2n)$. Puis, si $n \geqslant 2$,

$$a_n = 2a_{\lfloor n/2 \rfloor} + n \leqslant 2\lfloor n/2 \rfloor \lfloor \log_2(2\lfloor n/2 \rfloor) \rfloor + n \leqslant n\lfloor \log_2(n) + 1 \rfloor = n\lfloor \log_2(2n) \rfloor,$$

avec égalité lorsque $n/2 = \lfloor n/2 \rfloor$ et $n/2$ est une puissance de 2.
On montre de même que $b_n \leqslant n\lfloor \log_3(3n) \rfloor$ pour tout entier $n \geqslant 1$, avec égalité lorsque n est une puissance de 3. On en déduit déjà, si n est une puissance de 3, que

$$2^{a_n} - 3^{b_n} = 2^{a_n} - (3n)^n \leqslant (2n)^n - (3n)^n < 0.$$

Réciproquement, soit k et ℓ deux entiers naturels non nuls tels que $2^\ell < 3^k \leqslant 2^{\ell+1}$, et soit $n = 2^\ell$. Alors $k\log_2(3) \leqslant \ell + 1$, donc

$$\log_2(3)b_n \leqslant \log_2(3)n\lfloor \log_3(3n) \rfloor = \log_2(3)kn \leqslant (\ell+1)n = a_n,$$

de sorte que $2^{a_n} - 3^{b_n} = 2^{a_n} - 2^{\log_2(3)b_n} \geqslant 0$. Puisque $2^{a_n} \neq 3^{b_n}$, car l'un est impair et l'autre non, on en déduit que $2^{a_n} - 3^{b_n} > 0$, ce qui conclut cette solution.

Remarque : On pouvait en fait démontrer que, si

$$n = \sum_{k\geqslant 0} \alpha_k 2^k = \sum_{\ell \geqslant 0} \beta_\ell 3^\ell,$$

alors

$$a_n = \sum_{k\geqslant 0} (k+1)\alpha_k 2^k \text{ et } b_n = \sum_{\ell\geqslant 0} (\ell+1)\beta_\ell 3^\ell.$$

Remarque : Il eût été tentant de démontrer que $2^{a_n} > 3^{b_n}$ dès lors que n est une puissance de 2 ou que $n+1$ est une puissance de 3. Cependant, il n'en est rien : en notant $\langle x \rangle$ la partie fractionnaire d'un réel x, c'est-à-dire $\langle x \rangle = x - \lfloor x \rfloor$, on peut en fait démontrer que $2^{a_n} < 3^{b_n}$ dès lors que $\langle \log_3(n) \rangle < 7/100$ ou que $\langle \log_2(n) \rangle > 98/100$.

Commentaire des correcteurs Cet exercice était difficile, et seuls cinq élèves l'ont intégralement résolu. En pratique, de nombreux élèves ont eu de bonnes idées mais se sont arrêtés en cours de route, au lieu de prendre du recul pour voir comment généraliser ou exploiter leurs découvertes. Ainsi,

- ▷ Plusieurs élèves ont remarqué empiriquement, puis démontré, que la valeur de $a_{n+1} - a_n$ dépendait de la valuation 2-adique de n, en déduisant des sommes *horribles* pour l'expression de a_n, alors qu'en utiisant un double-comptage, ils auraient pu obtenir les expressions somme toute mignonnes obtenues ci-dessus.

- ▷ De nombreux élèves ont remarqué empiriquement que a_n croissait vite quand n était une puissance de 2, et ont donc exprimé leur envie de démontrer que $2^{a_n} > 3^{b_n}$ quand n était une puissance de 2. Cependant, ils se sont arrêtés là, ou bien se sont contentés de vérifier que $a_n = n(1+\log_2(n))$ quand n est une puissance de 2, mais n'ont pas pensé à rechercher de borne supérieure pour le terme b_n quand n est un nombre quelconque.
- ▷ Plusieurs élèves, après avoir réussi à démontrer que $3^{b_n} > 2^{a_n}$ lorsque n était une puissance de 3, ont conjecturé et cherché à démontrer que $2^{a_n} > 3^{b_n}$ lorsque n était une puissance de 2. Malheureusement pour eux, là résidait la difficulté principale (et particulièrement sournoise !) du problème, puisque cette conjecture pourtant très tentante était invalide, le premier contre-exemple étant $n = 2^8$.

  C'est là qu'il aurait été utile de prendre du recul pour voir où la preuve de cette conjecture pêchait, avant de l'affiner pour se concentrer simultanément sur les entiers n pour lesquels a_n est « grand » (c'est-à-dire que n n'est pas beaucoup plus grand qu'une puissance de 2) et b_n est « petit » (c'est-à-dire que n n'est pas beaucoup plus petit qu'une puissance de 3). Les élèves qui ont eu cette idée s'en sont tous tirés avec brio.

Exercice 7. Morgane a écrit les trois entiers 3, 4 et 12 au tableau. Elle effectue ensuite des changements successifs en procédant comme suit : elle choisit deux nombres a et b écrits au tableau, les efface, et les remplace par $(3a+4b)/5$ et $(4a-3b)/5$.
Morgane peut-elle, après un nombre fini de tels changements,

a) parvenir à écrire le nombre 13 au tableau ?

b) parvenir à écrire le nombre -12 au tableau ?

Solution de l'exercice 7 Nous allons démontrer que la réponse est *négative* dans les deux cas.
Soit $\mathcal{S}$ la somme des carrés des nombres écrits au tableau, et soit f et g les fonctions définies par $f : (x,y) \to (3x+4y)/5$ et $g : (x,y) \to (4x-3y)/5$. La relation

$$f(x,y)^2 + g(x,y)^2 = x^2 + y^2$$

nous assure que, lorsque Morgane remplace deux nombres a et b par $f(a,b)$ et $g(a,b)$, elle ne change pas la valeur de $\mathcal{S}$.
En outre, les égalités $f(f(x,y),g(x,y)) = x$ et $g(f(x,y),g(x,y)) = y$ nous indiquent que les changements qu'effectue Morgane sont réversible : si elle transforme un triplet non ordonné $\mathbf{t} = (a,b,c)$ en un autre triplet $\mathbf{t}' = (a',b',c)$ tel que $a' = f(a,b)$ et $b' = g(a,b)$, elle peut retransformer $\mathbf{t}'$ en $\mathbf{t}$.
On traite maintenant les deux questions séparément.

a) Si jamais elle réussit à écrire trois nombres x, y et z tels que $z = 13$, alors

$$x^2 + y^2 + 13^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \mathcal{S} = 3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2,$$

de sorte que $x = y = 0$. Cela signifie que Morgane peut transformer, en plusieurs étapes, le triplet $(3,4,12)$ en $(0,0,13)$. Elle peut donc également transformer $(0,0,13)$ et $(3,4,12)$.
On dit alors qu'un triplet (x,y,z) de nombres rationnelles est *sympathique* si $v_{13}(u) \geqslant 1$ pour tout $u \in \{x,y,z\}$. Si Morgane transforme un triplet (x,y,z) sympathique en un nouveau triplet (x',y',z'), ce dernier est clairement sympathique lui aussi. Ainsi, à partir du triplet sympathique $(0,0,13)$, Morgane ne peut obtenir que des triplets sympathiques. Elle ne peut donc pas obtenir le triplet $(3,4,12)$. Ceci démontre bien qu'elle ne pouvait pas transformer le triplet $(3,4,12)$ en $(0,0,13)$.

b) Nous allons carrément démontrer que Morgane ne peut pas écrire d'entier autre que les éléments de l'ensemble $\Omega = \{0, \pm 3, \pm 4, \pm 5, 12\}$. [3]
Considérons un triplet ordonné (x_1,x_2,x_3). Pour tous les entiers i et j distincts l'un de l'autre, on note $\Theta_{i,j}(x_1,x_2,x_3)$ le triplet obtenu à partir de (x_1,x_2,x_3) en remplaçant les nombres x_i et x_j par $f(x_i,x_j)$ et $g(x_i,x_j)$. Par ailleurs, on dit que (x_1,x_2,x_3) est d'*ordre* n si $\min\{v_5(x_1), v_5(x_2), v_5(x_3)\} = -n$, et qu'il s'agit d'un triplet *égalitaire* s'il y a au moins deux indices i tels qu $v_5(x_i) = -n$.
Tout triplet d'ordre $n \geqslant 1$ qu'obtiendra Morgane est égalitaire. En effet, supposons que cela ne soit pas le cas. Sans perte de généralité, on a $v_5(x_1) = -n$, $v_5(x_2) \geqslant 1-n$ et $v_5(x_3) \geqslant 1-n$. Alors, en posant $X_i = 5^n x_i$, on constate que $X_1 \not\equiv 0 \pmod 5$ et que $X_2 \equiv X_3 \equiv 0 \pmod 5$, de sorte que

$$0 \equiv 5^{2n} \times 13^2 \equiv 5^{2n}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \equiv X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \equiv X_1^2 \not\equiv 0 \pmod 5,$$

ce qui est absurde.

3. Cela répondrait aussi à la question a), mais de manière nettement plus compliquée.

Soit alors $n \geqslant 0$ un entier, puis (x_1, x_2, x_3) et (y_1, y_2, y_3) deux triplets d'ordres $\ell \leqslant n$ et $n+1$ que Morgane peut obtenir successivement. Il existe deux entiers i et j tels que $\Theta_{i,j}(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$, et le triplet (y_1, y_2, y_3) est égalitaire. En notant k l'élément de $\{1, 2, 3\}$ autre que i et j, puis $X_u = 5^n x_u$ et $Y_u = 5^{n+1} y_u$ pour tout $u \in \{1, 2, 3\}$, on constate que

$$Y_i = 3X_i + 4X_j \not\equiv 0 \pmod 5,\ Y_j = 4X_i - 3X_j \not\equiv 0 \pmod 5 \text{ et } Y_k \equiv 0 \pmod 5.$$

On en déduit immédiatement que les triplets $\Theta_{i,k}(y_1, y_2, y_3)$, $\Theta_{j,k}(y_1, y_2, y_3)$, $\Theta_{k,i}(y_1, y_2, y_3)$ et $\Theta_{k,j}(y_1, y_2, y_3)$ sont tous d'ordre $n+2$. De même,

$$f(y_j, y_i) = (24X_i + 7X_j)/5^{n+2} \text{ et } g(y_j, y_i) = (7X_i - 24X_j)/5^{n+2}.$$

Puisque $24X_i + 7X_j \equiv Y_j \pmod 5$ et $7X_i - 24X_j \equiv -Y_i \pmod 5$, le triplet $\Theta_{j,i}(y_1, y_2, y_3)$ est lui aussi d'ordre $n+2$. Enfin, comme dans la solution n°1, on vérifie aisément que $\Theta_{i,j}$ est une involution, de sorte que $\Theta_{i,j}(y_1, y_2, y_3)$ est d'ordre $\ell \leqslant n$.

Pour finir, soit $\mathbf{T}$ un triplet, avec au moins une coordonnée x entière, que Morgane peut écrire. Supposons que Morgane a écrit successivement des triplets $\mathbf{T}_0, \ldots, \mathbf{T}_k$ tels que $\mathbf{T}_0 = (3, 4, 12)$ et $\mathbf{T}_k = \mathbf{T}$ soit à coordonnées entières, avec k minimal.

Soit $\mathbf{T}_i$ un triplet d'ordre n maximal parmi les triplets $\mathbf{T}_0, \ldots, \mathbf{T}_k$. Si $n \geqslant 1$ et si $i \leqslant k-1$, on vient de démontrer que $\mathbf{T}_{i-1} = \mathbf{T}_{i+1}$, ce qui vient contredire la minimalité de k. Si $n \geqslant 1$ et si $i = k$, alors $\mathbf{T}_k$ contient une coordonnée déjà présente dans $\mathbf{T}_{k-1}$ et deux coordonnées de valuation 5-adique égale à $-n$, donc distinctes de x. Ceci vient là encore contredire la minimalité de k.

Il suffit maintenant de démontrer que, partant d'un triplet $\mathbf{t} = (x_1, x_2, x_3)$ d'éléments de Ω tel que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 13^2$, tout triplet $\mathbf{t}' = (y_1, y_2, y_3)$ à coordonnées entières que Morgane peut former est à coordonnées dans Ω. Tout d'abord, on peut supposer sans perte de généralité que $|x_1| \leqslant |x_2| \leqslant |x_3|$, de sorte que $3 \times 5^2 < 13^2 \leqslant 3x_3^2$, donc que $x_3 = 12$ et que $(x_1, x_2) \in \{(0, \pm 5), (\pm 3, \pm 4)\}$.

On suppose alors que $\mathbf{t}'$ a une coordonnée entière qui n'appartient pas à Ω. Soit i et j les entiers tels que $\mathbf{t}' = \Theta_{i,j}(\mathbf{t})$. Si $\{x_i, x_j\} \subseteq \{0, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$, alors $y_i^2 + y_j^2 = x_i^2 + x_j^2 = 5^2$, donc $\{y_i, y_j\} \subseteq \Omega$. Ainsi, l'un des deux entiers x_i et x_j est égal à 12. Or,

$$0 \equiv 5y_i \equiv 3x_i + 4x_j \equiv 3(x_i - 2x_j) \pmod 5,$$

donc $x_i \equiv 2x_j \pmod 5$.

Si $x_i = 12$, alors $x_j \equiv 1 \pmod 5$, donc $x_j = -4$, et $(y_i, y_j) = (4, 12)$; si $x_j = 12$, alors $x_i \equiv -1 \pmod 5$, donc $x_j = 4$, et $(y_i, y_j) = (12, -4)$. Dans les deux cas, on a bien $\{y_i, y_j\} \subseteq \Omega$. En conclusion, tout nombre entier que peut écrire Morgane appartient nécessairement à Ω. Elle ne peut donc pas écrire le nombre -12 au tableau.

Solution alternative n°1 On peut présenter la solution à la partie a) d'une autre manière. Tout d'abord, tout nombre qu'écrira Morgane appartiendra nécessairement à l'ensemble $\mathbb{L} = \{d/5^k \colon d, k \in \mathbb{Z}\}$. Puisque 5 et 13 sont premiers entre eux, on identifie chaque élément de $\mathbb{L}$ à son résidu modulo 13.

Mais alors, si Morgane parvient à remplacer deux nombres a et b par des nombres $a' = f(a, b)$ et $b' = g(a, b)$ tels que $a' \equiv b' \equiv 0 \pmod{13}$, cela signifie que $3a + 4b \equiv 4a - 3b \equiv 0 \pmod{13}$, et donc que

$$a \equiv -25a \equiv -3(3a + 4b) - 4(4a - 3b) \equiv 0 \pmod{13} ;$$
$$b \equiv -25b \equiv -4(3a + 4b) + 3(4a - 3b) \equiv 0 \pmod{13}.$$

Par conséquent, une récurrence immédiate indique que les nombres que Morgane écrira au tableau ne seront jamais tous congrus à 0 modulo 13.

Solution alternative n°2 On peut également répondre à la partie a) avec une version simplifiée du raisonnement utilisé pour la partie b).

En effet, il s'agit de démontrer que l'on ne peut pas atteindre le triplet $\mathbf{T} = (0, 0, 13)$, à l'ordre près des coordonnées. Si Morgane atteint ce triplet, et en raisonnant comme ci-dessus, elle a nécessairement dû écrire des triplets $\mathbf{T}_0 = (3, 4, 12), \mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_k = \mathbf{T}$, chaque $\mathbf{T}_i$ étant à coordonnées entières.

Mais alors, puisque chaque opération $\Theta_{i,j}$ est une involution, on peut écrire $\mathbf{T}_{k-1}$ sous la forme $\Theta_{i,j}(\mathbf{T})$. À l'ordre près de ses coordonnées, le triplet $\mathbf{T}_{k-1}$ donc est égal à $\Theta_{2,3}(0, 0, 13)$ ou à $\Theta_{3,2}(0, 0, 13)$, c'est-à-dire à $(0, 52/5, -39/5)$ ou à $(0, 39/5, 52/5)$. Cette contradiction démontre que Morgane ne pourra jamais écrire le nombre 13 au tableau.

Commentaire des correcteurs L'exercice était très difficile, et peu d'élèves ont réussi à trouver des éléments véritablement intéressants. Plusieurs élèves ont compris l'importance de la valuation 5 adique des nombres écrits : il fallait réussir à formaliser cette idée et regarder l'évolution des valuations 5-adiques écrites.