

Arithmétique - Groupe D

Rémi

9 janvier 2021

Pour chaque exercice, un lien vers AOPS est fourni en cliquant sur "Ici", ainsi que la source de l'exercice.

Exercice 1 Soit $(a_n)_n$ une suite définie par $a_1 = 5$, $a_2 = 13$ et, pour tout entier $n \geq 2$, $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, a_n est premier avec a_{n+1}
2. Montrer que si p est un diviseur premier de a_{2^k} , alors $p \equiv 1[2^{k+1}]$

Solution de l'exercice 1 Ici (Vietnam 2020)

Exercice 2 Trouver tous les entiers $n \geq 1$ pour lesquels il existe un diviseur positif d de n tel que $d^2n + 1$ divise $n^2 + d^2$.

Solution de l'exercice 2 Ici (Allemagne 2020)

Exercice 3 Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Un entier strictement positif b est dit a -bon si pour tout entier n tel que $an \geq b$, $an + 1$ divise $\binom{an}{b} - 1$. Soit b un entier a -bon tel que $b + 2$ n'est pas a -bon. Montrer que $b + 1$ est un nombre premier.

Solution de l'exercice 3 Ici (IMO 2019 Shortlist, N5)

Exercice 4 Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels n tels que $d(n!) - 1$ soit composé.

Solution de l'exercice 4 Ici (Chine 2011)