

# Arithmétique - Groupe D

Rémi

9 janvier 2021

*Pour chaque exercice, un lien vers AOPS est fourni en cliquant sur "Ici", ainsi que la source de l'exercice.*

**Exercice 1** Soit  $(a_n)_n$  une suite définie par  $a_1 = 5$ ,  $a_2 = 13$  et, pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$ .

1. Montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,  $a_n$  est premier avec  $a_{n+1}$
2. Montrer que si  $p$  est un diviseur premier de  $a_{2^k}$ , alors  $p \equiv 1[2^{k+1}]$

Solution de l'exercice 1 Ici (Vietnam 2020)

**Exercice 2** Trouver tous les entiers  $n \geq 1$  pour lesquels il existe un diviseur positif  $d$  de  $n$  tel que  $d^2n + 1$  divise  $n^2 + d^2$ .

Solution de l'exercice 2 Ici (Allemagne 2020)

**Exercice 3** Soit  $a \in \mathbb{N}^*$ . Un entier strictement positif  $b$  est dit  $a$ -bon si pour tout entier  $n$  tel que  $an \geq b$ ,  $an + 1$  divise  $\binom{an}{b} - 1$ . Soit  $b$  un entier  $a$ -bon tel que  $b + 2$  n'est pas  $a$ -bon. Montrer que  $b + 1$  est un nombre premier.

Solution de l'exercice 3 Ici (IMO 2019 Shortlist, N5)

**Exercice 4** Soit  $d \in \mathbb{N}^*$ . Montrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels  $n$  tels que  $d(n!) - 1$  soit composé.

Solution de l'exercice 4 Ici (Chine 2011)