PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 6 JANVIER 2021

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2006 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2005 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- Dans le cas d'un exercice de géométrie, faire (au moins) une figure pertinente sur une feuille séparée. Cette figure devra être propre, grande, et la propriété que l'on cherche à démontrer devra être apparente : par exemple, si l'on souhaite démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.
- Si l'élève ne respecte pas la consigne précédente, il perdra automatiquement un point à l'exercice concerné (on ne donne pas de note strictement négative).

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique via le formulaire de dépôt disponible à l'adresse suivante :

`http://igm.univ-mlv.fr/~juge/pofm/form/`

Énoncés Junior

Exercice 1. On pose $n = 2021$. Démontrer que le nombre $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 35.

Exercice 2. Soit n et k deux entiers, tels que $n \geqslant 3$. Théo organise les élections des délégués de sa classe de n élèves : chaque élève doit voter pour un de ses camarades (tout le monde est candidat), et nul ne vote pour lui-même. Puis Théo répartit les élèves en groupes de sorte que, si un élève est dans un groupe, l'élève pour lequel il a voté n'y soit pas.

Pour quelles valeurs de k Théo est-il sûr de pouvoir répartir les élèves en au plus k groupes, et ce quelle que soit la manière dont les élèves auront voté ?

Exercice 3. On définit la suite $a_1, a_2, a_3 \ldots$ de la façon suivante : $a_1 = 63$ et, pour tout entier $n \geqslant 2$, a_n est le plus petit multiple de n qui soit supérieur ou égal à a_{n-1}. Démontrer que les termes de notre suite sont deux à deux distincts.

Exercice 4. Soit $P_1 P_2 \ldots P_{2021}$ un polygone convexe à 2021 sommets tel que, pour chaque sommet P_i, les 2018 diagonales issues de P_i divisent l'angle $\widehat{P_i}$ en 2019 angles égaux.

Démontrer que $P_1 P_2 \ldots P_{2021}$ est un polygone régulier, c'est-à-dire un polygone dont tous les angles ont même mesure et tous les côtés ont même longueur.

Énoncés Senior

Exercice 5. Soit $P_1 P_2 \ldots P_{2021}$ un polygone convexe à 2021 sommets tel que, pour chaque sommet P_i, les 2018 diagonales issues de P_i divisent l'angle $\widehat{P_i}$ en 2019 angles égaux.

Démontrer que $P_1 P_2 \ldots P_{2021}$ est un polygone régulier, c'est-à-dire un polygone dont tous les angles ont même mesure et tous les côtés ont même longueur.

Exercice 6. Les suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$ et $(b_n)_{n \geqslant 0}$ sont définies par

$$\begin{cases} a_n = 0 & \text{si } n = 0\,; \\ a_n = 2a_{\lfloor n/2 \rfloor} + n & \text{si } n \geqslant 1\,; \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_n = 0 & \text{si } n = 0\,; \\ b_n = 3b_{\lfloor n/3 \rfloor} + n & \text{si } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Démontrer que la suite de terme général $2^{a_n} - 3^{b_n}$ change de signe infiniment souvent.

Exercice 7. Morgane a écrit les trois entiers 3, 4 et 12 au tableau. Elle effectue ensuite des changements successifs en procédant comme suit : elle choisit deux nombres a et b écrits au tableau, les efface, et les remplace par $(3a + 4b)/5$ et $(4a - 3b)/5$.

Morgane peut-elle, après un nombre fini de tels changements,

a) parvenir à écrire le nombre 13 au tableau ?

b) parvenir à écrire le nombre -12 au tableau ?