Groupe B Inégalités — TD + Corrigé

6 Décembre 2020

Lorsqu'il y a écrit quelque chose du genre (⚠Jensen), cela signifie qu'on a besoin de l'inégalité de Jensen pour faire l'exercice, et je ne suis pas sûr d'avoir le temps de le faire. Donc si vous la connaissiez déjà ou qu'on a eu le temps de la voir, allez-y, sinon, vous risquez d'avoir un peu de mal...

Les exercices $0, 4, 6, 7, 8, 11, 14, 25, (19?)$ seront corrigés en priorité, et ensuite on corrigera ceux que vous voulez dans le temps qu'il reste.

Plein d'exercices

Exercice 0 *Montrer* que pour x réel, $x^2 \geqslant 0$.

Exercice 1 Soit x réel non nul. Quand a-t-on $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$?

Exercice 2 Pour $a, b \geqslant 0$, montrer que $8(a^4 + b^4) \geqslant (a+b)^4$.

Exercice 3 Soient a, b, c des réels positifs tels que $abc = 2$. Montrer que

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(b^2a + c^2b + a^2c) \geqslant 36.$$

Exercice 4 Soient a, b, c des réels positifs.
Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$, puis que $(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ca)$.

Exercice 5 Montrer que si $a, b, c > 0$, alors

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant a\sqrt{b^2+c^2} + c\sqrt{a^2+b^2}$$

Exercice 6 (Nesbitt) Soient a, b, c des réels positifs, montrer du plus de façons possible (dont au moins une avec le réarrangement) que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$$

Exercice 7 Soient a, b, c des réels positifs.
Montrer d'au moins deux façons différentes que $(a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geqslant 9$.

Exercice 8 Montrer que l'inégalité arithmético-quadratique est encore vraie quand on ne suppose plus les a_i positifs.

Exercice 9 Montrer que pour $a, b, c, d > 0$, on a

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geqslant \frac{64}{a+b+c+d}$$

Exercice 10 Soient x, a, b réels. Montrer que $a\cos(x) + b\sin(x) \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$

Exercice 11 Soient $a, b, c > 0$ tels que $a^2+b^2+c^2 = 1$. Montrer que $2a+5b+9c \leqslant \sqrt{110}$. Quand a-t-on égalité ?

Exercice 12 Soient a, b, c des réels positifs, montrer que

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant a+b+c.$$

Exercice 13 Soient $x, y > 1$. Montrer que

$$\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \geqslant 8.$$

Exercice 14 Soient a, b, c des réels positifs, montrer que

$$\frac{a}{2c+a} + \frac{b}{2a+b} + \frac{c}{2b+c} \geqslant 1$$

Exercice 15 Soient $a, b, c > 0$ tels que $a^2+b^2+c^2 = 3$, montrer que

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geqslant \frac{3}{2}$$

Exercice 16 Soient $a, b, c > 0$, montrer que

$$\frac{a^3}{b^2+c^2} + \frac{b^3}{c^2+a^2} + \frac{c^3}{b^2+a^2} \geqslant \frac{a+b+c}{2}$$

Exercice 17 Soient a, b des entiers positifs tels que $a^3 - 3a = 3b - b^3$, trouver toutes les valeurs possibles de a et b.

Exercice 18 (MacLaurin)
Montrer l'inégalité de MacLaurin dans le cas $n = 3$: Si $a, b, c > 0$, alors

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \geqslant \sqrt[3]{abc}.$$

Pour les plus aventureux, montrer l'inégalité de MacLaurin dans le cas $n = 4$ (*): Si $a, b, c, d > 0$, alors

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$$

Exercice 19 (⚠Jensen) Soient α, β, γ les trois angles d'un triangle, montrer que $\sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma) \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Exercice 20 (⚠Jensen) Prouver l'inégalité des moyennes généralisées/pondérées que je n'ai pas démontré (avec $p, q > 0$).

Toujours des exercices, mais plus durs

Exercice 21 (Hölder)(*)
Soient $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
1) (Young) Soient $a, b > 0$. Montrer que $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geqslant ab$.
2) Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des réels positifs tels que $a_1^p + \cdots a_n^p = b_1^q + \cdots + b_n^q = 1$.
Montrer que $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots a_n b_n \leqslant 1$.
3) Montrer l'inégalité de Hölder dans le cas général, c'est à dire en supposant seulement les a_i et les b_i positifs :

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots a_n b_n \leqslant (a_1^p + \cdots + a_n^p)^{1/p} \cdot (b_1^q + \cdots + b_n^q)^{1/q}$$

Exercice 22 (Minkowski)(*)
Soit $p > 1$, on cherche à montrer que

$$((a_1 + b_1)^p + \cdots + (a_n + b_n)^p)^{1/p} \leqslant (a_1^p + \cdots + a_n^p)^{1/p} + (b_1^p + \cdots + b_n^p)^{1/p}.$$

Remarquer que $(a_i + b_i)^p = a_i(a_i + b_i)^{p-1} + b_i(a_i + b_i)^{p-1}$, réécrire $(a_1 + b_1)^p + \cdots + (a_n + b_n)^p$ en conséquence et appliquer Hölder de manière judicieuse.

Exercice 23 (P1 JBMO 2011)(*)
Soient $a, b, c > 0$ tels que $abc = 1$. Montrer que

$$(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)(b^5+b^4+b^3+b^2+b+1)(c^5+c^4+c^3+c^2+c+1) \geqslant 8(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1).$$

(Indication : Calculer $(a-1)(a^2+a+1)$ et $(a-1)(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)$, et factoriser un côté par une quantité qui va rendre l'inégalité plus agréable.

Exercice 24 (⚠Géométrie, puissance d'un point)(*)(Relation d'Euler)
Soit ABC un triangle, on note O le centre du cercle circonscrit Γ de rayon R, et I le centre du cercle inscrit de rayon r. On cherche à montrer que $R \geqslant 2r$.
On note X la deuxième intersection de (BI) avec Γ, et X' le point diamétralement opposé à X (pour les curieux, on les appelle les pôles Sud et Nord de B dans ABC). On note également D le projeté de I sur (BC).

1) Montrer que les triangles BDI et $X'CX$ sont semblables.
2) Montrer que IXC est isocèle en X.
3) En considérant la puissance de I par rapport à Γ, montrer que $R(R-2r) = |OI|^2$, et conclure.

Exercice 25 (Tchebychev)(*)
Soient $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ et $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$ des réels, montrer que la moyenne des produits est plus grande que le produit des moyennes, autrement dit que

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{n} \geqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right)$$

Application : Soient $x, y, z > 0$, montrer que

$$\frac{x^4 + y^4}{x^3 + y^3} + \frac{y^4 + z^4}{y^3 + z^3} + \frac{z^4 + x^4}{z^3 + x^3} \geqslant x + y + z$$

Exercice 26 (**)(Problème #6483, Mathraining)
Soient $a, b, c > 0$. Montrer que

$$8(a^3 + b^3 + c^3)^2 \geqslant 9(a^2 + bc)(b^2 + ac)(c^2 + ab).$$

Exercice 27 (Popoviciu)(**)(⚠Convexité)
Si f est une fonction convexe, alors pour tous x, y, z,

$$3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + f(x) + f(y) + f(z) \geqslant 2\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)$$

(Indication : ne pas utiliser Jensen, mais la définition de la convexité)

Solutions

Solution de l'exercice 0 Si $x \geqslant 0$, c'est vrai comme produit de nombres positifs, si $x \leqslant 0$, c'est vrai comme produit de nombres négatifs.
Dans tous les cas, c'est vrai.
Autre solution : on a $x^2 = x \times x + 0 \times 0 \geqslant x \times 0 + x \times 0 = 0$ par réarrangement comme $(x, 0)$ et $(x, 0)$ sont ordonnés dans la même moitié.

Solution de l'exercice 1 On a $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{1}{x}(x-1)^2$, donc si $x > 0$, l'inégalité est bien vérifiée, et sinon $x + \frac{1}{x} - 2 < 0$, et l'inégalité est fausse.
On a donc $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ exactement quand $x > 0$.

Solution de l'exercice 2 C'est juste $M_4 \geqslant M_1$.

Solution de l'exercice 3 On applique l'IAG aux deux facteurs : $a^2b + b^2c + c^2a \geqslant 3abc = 6$ et $b^2a + c^2b + a^2c \geqslant 3abc = 6$, d'où le résultat.

Solution de l'exercice 4 Par IAG, on a $\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant ab$, $\frac{b^2+c^2}{2} \geqslant bc$ et $\frac{c^2+a^2}{2} \geqslant ac$. On obtient le résultat en sommant ces trois inégalités.
Pour la deuxième partie, on a $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geqslant 3(ab+bc+ca)$ avec la partie précédente.

Solution de l'exercice 5 Par IAG, on a $\frac{a^2+(b^2+c^2)}{2} \geqslant a\sqrt{b^2+c^2}$, et de même $\frac{(a^2(b^2)+c^2}{2} \geqslant c\sqrt{b^2+a^2}$. On obtient le résultat en sommant les inégalités.

Solution de l'exercice 6 L'inégalité étant symétrique, on suppose spdg $a \geqslant b \geqslant c$, on a également $\dfrac{1}{b+c} \geqslant \dfrac{1}{c+a} \geqslant \dfrac{1}{a+b}$. Le réarrangement nous donne alors

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} &\geqslant \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} + \frac{a}{a+b} \text{ et} \\ \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} &\geqslant \frac{c}{b+c} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{a+b} \end{aligned}$$

On obtient le résultat en sommant puis en divisant par 2.
Autre méthode avec les mauvais élèves : on a

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = \frac{a^2}{ab+ca} + \frac{b^2}{ab+cb} + \frac{c^2}{ca+bc} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geqslant \frac{3}{2}$$

d'après l'exercice 4.

Solution de l'exercice 7 Cauchy-Schwarz nous donne directement $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \geqslant (1+1+1)^2 = 9$.
Autre solution : Par IAH, on a

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leqslant \frac{a+b+c}{3},$$

et l'inégalité s'en déduit.

Solution de l'exercice 8 Il suffit d'appliquer Cauchy-Schwarz à $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $(1, 1, \ldots 1)$.

Solution de l'exercice 9 L'iéngalité des mauvais élèves nous donne directement

$$\frac{1^2}{a} + \frac{1^2}{b} + \frac{2^2}{c} + \frac{4^2}{d} \geqslant \frac{(1+1+2+4)^2}{a+b+c+d}$$

Solution de l'exercice 10 Par Cauchy-Schwarz, on a

$$(a\cos(x)+b\sin(x))^2 \leqslant (a^2+b^2)(\cos^2(x)+\sin^2(x)) = a^2+b^2,$$

et prendre la racine donne l'inégalité voulue.

Solution de l'exercice 11 Par Cauchy-Schwarz, on a

$$(2a+5b+9c)^2 \leqslant (2^2+5^2+9^2)(a^2+b^2+c^2) = 110,$$

d'où l'inégalité. Le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz est obtenu quand il existe r tel que $a=2r, b=5r, c=9r$, et en reprenant la condition $a^2+b^2+c^2=1$, on trouve $r=\frac{1}{\sqrt{110}}$.

Solution de l'exercice 12 L'inégalité étant symétrique, on suppose que $a \geqslant b \geqslant c$. Comme $a^2 \geqslant b^2 \geqslant c^2$ et $\frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{c}$, on a par réarrangement que

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geqslant \frac{a^2}{a}+\frac{b^2}{b}+\frac{c^2}{c} = a+b+c.$$

Solution de l'exercice 13 Par mauvais élèves, on a $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1} \geqslant \frac{(x+y)^2}{x+y-2}$. Si on note $z=x+y$, on cherche à montrer que si $z>2$, on a $\frac{z^2}{z-2} \geqslant 8 \iff z^2 \geqslant 8(z-2) \iff (z-4)^2 \geqslant 0$ qui est toujours vraie, d'où le résultat.
Autre solution : on suppose spdg que $x \geqslant y$, alors par réarrangement on a $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1} \geqslant \frac{x^2}{x-1}+\frac{y^2}{y-1}$. La preuve de $\frac{z^2}{z-1} \geqslant 4$ est similaire à la preuve précédente.

Solution de l'exercice 14 On a par mauvais élèves

$$\frac{a}{2c+a}+\frac{b}{2a+b}+\frac{c}{2b+c} = \frac{a^2}{2ca+a^2}+\frac{b^2}{2ab+b^2}+\frac{c^2}{2cb+c^2} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)} = 1$$

Solution de l'exercice 15 Par mauvais élèves puis par l'exercice 4, on a

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1+ca}{\geqslant}\frac{9}{3+ab+bc+ca} \geqslant \frac{9}{3+a^2+b^2+c^2} = \frac{3}{2}.$$

Solution de l'exercice 16 On suppose spdg que $a \geqslant b \geqslant c$. Comme $\frac{a}{b^2+c^2} \geqslant \frac{b}{c^2+a^2} \geqslant \frac{c}{b^2+a^2}$ et $a^2 \geqslant b^2 \geqslant c^2$, on a par réarrangement

$$\frac{a^3}{b^2+c^2}+\frac{b^3}{c^2+a^2}+\frac{c^3}{b^2+a^2} \geqslant \frac{ab^2}{b^2+c^2}+\frac{bc^2}{c^2+a^2}+\frac{ca^2}{b^2+a^2}$$
$$\frac{a^3}{b^2+c^2}+\frac{b^3}{c^2+a^2}+\frac{c^3}{b^2+a^2} \geqslant \frac{ac^2}{b^2+c^2}+\frac{ba^2}{c^2+a^2}+\frac{cb^2}{b^2+a^2}$$

et on obtient le résultat en sommant les deux inégalités.

Solution de l'exercice 17 La condition se réécrit $\frac{a^3+b^3}{3} = a+b$, or par $M_3 \geqslant M_1$, on a $\frac{a^3+b^3}{\geqslant}\left(\frac{a+b}{3}\right)^3$, donc $(a+b)^2 \geqslant 27$. Comme a et b sont entiers, on a $a+b \geqslant 5$. Il ne reste qu'un petit nombre de cas à traiter, et on trouve que seuls les couples $(0,0),(1,2),(2,1)$ sont solutions.

Solution de l'exercice 18 Je ne fais que le cas $n=3$, le cas $n=4$ est juste un développement bourrin qui se résout par IAG pondérée.
On a déjà montré dans l'exercice 4 que $(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ca)$, ce qui donne $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}$. Par ailleurs, par IAG on a $\frac{ab+bc+ca}{3} \geqslant \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$, et on obtient la deuxième partie de l'inégalité en passant à la racine.

Solution de l'exercice 19 Remarquez qu'il y avait une erreur dans le TD de base, qui a été corrigée ici : c'est

bien $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ et non $\frac{1}{8}$.
Par IAG puis par Jensen car le sinus est concave sur $[0,\pi]$, on a

$$\sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma) \leqslant \left(\frac{\sin(\alpha)+\sin(\beta)+\sin(\gamma)}{3}\right)^3 \leqslant \left(\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)\right)^3 = \sin^3\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Solution de l'exercice 20 Voir https://www.mathraining.be/chapters/22?type=1&which=72

Solution de l'exercice 21 Voir https://www.mathraining.be/chapters/21?type=1&which=65

Solution de l'exercice 22 Voir https://www.mathraining.be/chapters/21?type=1&which=66

Solution de l'exercice 23 On a

$$(a-1)(a^2+a+1) = a^3-1 \text{ et } (a-1)(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1) = a^6-1 = (a^3+1)(a^3-1),$$

donc $(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1) = (a^3+1)(a^2+a+1)$.
Après division dans l'inégalité initiale par $(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)$ (qui est bien positif, toujours faire attention à ça), on obtient $(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) \geqslant 8$.
Ceci est vrai par IAG : $(1+a^3) \geqslant 2a^{3/2}$, et quand on multiplie on a $(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) \geqslant 8(abc)^{3/2} = 8$.

Solution de l'exercice 24 Voir https://www.mathraining.be/chapters/32?type=1&which=113

Solution de l'exercice 25 Voir https://www.mathraining.be/chapters/15?type=1&which=58
Pour l'application, on suppose spdg $x \geqslant y \geqslant z$, alors par Tchebychev, on a

$$\frac{x^4+y^4}{2} \geqslant \left(\frac{x^3+y^3}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right) \iff \frac{x^4+y^4}{x^3+y^3} \geqslant \frac{x+y}{2}$$

et on obtient l'inégalité voulue en sommant.

Solution de l'exercice 26 Nice try :)
Soumettez votre solution au problème, et les gentils correcteurs vous diront si c'est bon.

Solution de l'exercice 27 Voir https://brilliant.org/wiki/popovicius-inequality/