# Groupe B Inégalités — TD

6 Décembre 2020

Lorsqu'il y a écrit quelque chose du genre (⚠Jensen), cela signifie qu'on a besoin de l'inégalité de Jensen pour faire l'exercice, et je ne suis pas sûr d'avoir le temps de le faire. Donc si vous la connaissiez déjà ou qu'on a eu le temps de la voir, allez-y, sinon, vous risquez d'avoir un peu de mal...

Les exercices $0, 4, 6, 7, 8, 11, 14, 25$, (19?) seront corrigés en priorité, et ensuite on corrigera ceux que vous voulez dans le temps qu'il reste.

## Plein d'exercices

**Exercice 0** *Montrer* que pour $x$ réel, $x^2 \geqslant 0$.

**Exercice 1** Soit $x$ réel non nul. Quand a-t-on $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ ?

**Exercice 2** Pour $a, b \geqslant 0$, montrer que $8(a^4 + b^4) \geqslant (a+b)^4$.

**Exercice 3** Soient $a, b, c$ des réels positifs tels que $abc = 2$. Montrer que

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(b^2a + c^2b + a^2c) \geqslant 36.$$

**Exercice 4** Soient $a, b, c$ des réels positifs.
Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$, puis que $(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab + bc + ca)$.

**Exercice 5** Montrer que si $a, b, c > 0$, alors

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant a\sqrt{b^2 + c^2} + c\sqrt{a^2 + b^2}$$

**Exercice 6** (Nesbitt) Soient $a, b, c$ des réels positifs, montrer du plus de façons possible (dont au moins une avec le réarrangement) que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$$

**Exercice 7** Soient $a, b, c$ des réels positifs.
Montrer d'au moins deux façons différentes que $(a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geqslant 9$.

**Exercice 8** Montrer que l'inégalité arithmético-quadratique est encore vraie quand on ne suppose plus les $a_i$ positifs.

**Exercice 9** Montrer que pour $a, b, c, d > 0$, on a

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geqslant \frac{64}{a+b+c+d}$$

**Exercice 10** Soient $x, a, b$ réels. Montrer que $a\cos(x) + b\sin(x) \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$

**Exercice 11** Soient $a, b, c > 0$ tels que $a^2+b^2+c^2 = 1$. Montrer que $2a+5b+9c \leqslant \sqrt{110}$. Quand a-t-on égalité ?

**Exercice 12** Soient $a, b, c$ des réels positifs, montrer que

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant a+b+c.$$

**Exercice 13** Soient $x, y > 1$. Montrer que

$$\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \geqslant 8.$$

**Exercice 14** Soient $a, b, c$ des réels positifs, montrer que

$$\frac{a}{2c+a} + \frac{b}{2a+b} + \frac{c}{2b+c} \geqslant 1$$

**Exercice 15** Soient $a, b, c > 0$ tels que $a^2+b^2+c^2 = 3$, montrer que

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geqslant \frac{3}{2}$$

**Exercice 16** Soient $a, b, c > 0$, montrer que

$$\frac{a^3}{b^2+c^2} + \frac{b^3}{c^2+a^2} + \frac{c^3}{b^2+a^2} \geqslant \frac{a+b+c}{2}$$

**Exercice 17** Soient $a, b$ des entiers positifs tels que $a^3 - 3a = 3b - b^3$, trouver toutes les valeurs possibles de $a$ et $b$.

**Exercice 18** (MacLaurin)
Montrer l'inégalité de MacLaurin dans le cas $n = 3$ : Si $a, b, c > 0$, alors

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \geqslant \sqrt[3]{abc}.$$

Pour les plus aventureux, montrer l'inégalité de MacLaurin dans le cas $n = 4$ (*): Si $a, b, c, d > 0$, alors

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$$

**Exercice 19** (⚠Jensen) Soient $\alpha, \beta, \gamma$ les trois angles d'un triangle, montrer que $\sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma) \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

**Exercice 20** (⚠Jensen) Prouver l'inégalité des moyennes généralisées/pondérées que je n'ai pas démontré (avec $p, q > 0$).

## Toujours des exercices, mais plus durs

**Exercice 21** (Hölder)(*)
Soient $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
**1)** (Young) Soient $a, b > 0$. Montrer que $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geqslant ab$.
**2)** Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des réels positifs tels que $a_1^p + \cdots a_n^p = b_1^q + \cdots + b_n^q = 1$.
Montrer que $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots a_n b_n \leqslant 1$.
**3)** Montrer l'inégalité de Hölder dans le cas général, c'est à dire en supposant seulement les $a_i$ et les $b_i$ positifs :

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots a_n b_n \leqslant (a_1^p + \cdots + a_n^p)^{1/p} \cdot (b_1^q + \cdots + b_n^q)^{1/q}$$

**Exercice 22** (Minkowski)(*)
Soit $p > 1$, on cherche à montrer que

$$((a_1 + b_1)^p + \cdots + (a_n + b_n)^p)^{1/p} \leqslant (a_1^p + \cdots + a_n^p)^{1/p} + (b_1^p + \cdots + b_n^p)^{1/p}.$$

Remarquer que $(a_i + b_i)^p = a_i(a_i + b_i)^{p-1} + b_i(a_i + b_i)^{p-1}$, réécrire $(a_1 + b_1)^p + \cdots + (a_n + b_n)^p$ en conséquence et appliquer Hölder de manière judicieuse.

**Exercice 23** (P1 JBMO 2011)(*)
Soient $a, b, c > 0$ tels que $abc = 1$. Montrer que

$$(a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)(b^5 + b^4 + b^3 + b^2 + b + 1)(c^5 + c^4 + c^3 + c^2 + c + 1) \geqslant 8(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1).$$

*(Indication : Calculer $(a - 1)(a^2 + a + 1)$ et $(a - 1)(a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$, et factoriser un côté par une quantité qui va rendre l'inégalité plus agréable.*

**Exercice 24** (⚠Géométrie, puissance d'un point)(*)(Relation d'Euler)
Soit $ABC$ un triangle, on note $O$ le centre du cercle circonscrit $\Gamma$ de rayon $R$, et $I$ le centre du cercle inscrit de rayon $r$. On cherche à montrer que $R \geqslant 2r$.
On note $X$ la deuxième intersection de $(BI)$ avec $\Gamma$, et $X'$ le point diamétralement opposé à $X$ (pour les curieux, on les appelle les pôles Sud et Nord de $B$ dans $ABC$). On note également $D$ le projeté de $I$ sur $(BC)$.

**1)** Montrer que les triangles $BDI$ et $X'CX$ sont semblables.
**2)** Montrer que $IXC$ est isocèle en $X$.
**3)** En considérant la puissance de $I$ par rapport à $\Gamma$, montrer que $R(R - 2r) = |OI|^2$, et conclure.

**Exercice 25** (Tchebychev)(*)
Soient $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ et $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$ des réels, montrer que la moyenne des produits est plus grande que le produit des moyennes, autrement dit que

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{n} \geqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right)$$

Application : Soient $x, y, z > 0$, montrer que

$$\frac{x^4 + y^4}{x^3 + y^3} + \frac{y^4 + z^4}{y^3 + z^3} + \frac{z^4 + x^4}{z^3 + x^3} \geqslant x + y + z$$

**Exercice 26** (**)(Problème #6483, Mathraining)
Soient $a, b, c > 0$. Montrer que

$$8(a^3 + b^3 + c^3)^2 \geqslant 9(a^2 + bc)(b^2 + ac)(c^2 + ab).$$

**Exercice 27** (Popoviciu)(**)(⚠Convexité)
Si $f$ est une fonction convexe, alors pour tous $x, y, z$,

$$3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + f(x) + f(y) + f(z) \geqslant 2\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)$$

*(Indication : ne pas utiliser Jensen, mais la définition de la convexité)*