Equations fonctionnelles - Groupe C

Rémi

5 décembre 2020

Exercice 1 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x)f(y) + f(x+y) = xy$$

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> En posant $x = 0$, on obtient : $(f(0)+1)f(y) = 0$. Comme f ne peut pas être la fonction nulle, on sait qu'il existe un y pour lequel $f(y) \neq 0$. Ainsi $f(0) = -1$. En posant $x = 1$ et $y = -1$, on obtient : $f(1)f(-1) - 1 = -1$ donc $f(1)f(-1) = 0$.
Si f(1)=0, en posant $x = 1$, on a $f(1+y) = y$. En posant $z = y+1$, on a $f(z) = z - 1$, qui est la seule solution possible dans ce cas.
Si f(-1)=0, en posant $x = -1$, on a $f(-1+y) = -y$. En posant $z = y-1$, on a $f(z) = -1 - z$, qui est la seule solution possible dans ce cas.
On vérifie réciproquement que ces deux fonctions conviennent bien.

Exercice 2 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x^{666} + y) = f(x^{2017} + 2y) + f(x^{42})$$

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> On voudrait faire une substitution avec laquelle $x^{666} + y = x^{2017} + 2y$. C'est possible en posant $y = x^{666} - x^{2017}$. On obtient alors $f(x^{42}) = 0$. Cela montre que f est nulle sur les réels positifs. On pose alors $y = 0$ et on obtient : $f(x^{666}) = f(x^{2017}) + f(x^{42})$. Or $x^{666} \geqslant 0$ pour tout x, donc $f(x^{666}) = 0$ aussi. Ainsi, $f(x^{2017}) = 0$. Donc f est nulle sur tout $\mathbb{R}$, car x^{2017} parcourt $\mathbb{R}$ tout entier. On vérifie réciproquement que la fonction nulle est bien solution, donc c'est la seule.

Exercice 3 Soit f une fonction qui vérifie pour tous réels x, y :

$$f(y + f(x)) = (y-1)f(x)^2 + 3x$$

Montrer que f est bijective

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Il existe de nombreuses manières de procéder. La méthode la plus efficace consiste à poser $y = 1$, ce qui donne $f(1 + f(x)) = 3x$. Cela montre que f est surjective (quitte à remplacer x par $\frac{x}{3}$). Mais cela donne également l'injectivité, puisque si $f(a) = f(b)$, alors $f(1 + f(a)) = f(1 + f(b))$, donc $3a = 3b$

soit finalement $a = b$.

Exercice 4 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad (x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2)$$

Solution de l'exercice 4 Pour simplifier les notations, on commence par poser $a = x + y$, et $b = x - y$. Notre équation se réécrit alors :

$$bf(a) - af(b) = ab(a^2 - b^2)$$

En posant $a = 0$, $bf(0) = 0$, donc $f(0) = 0$ On choisit maintenant a et b non nuls, et on divise par ab :

$$\frac{f(a)}{a} - \frac{f(b)}{b} = a^2 - b^2$$

$$\iff \frac{f(a)}{a} - a^2 = \frac{f(b)}{b} - b^2$$

Cette quantité est donc indépendante du paramètre choisi ! On a une constante c pour laquelle $\frac{f(a)}{a} - a^2 = c$ pour tout a. Cela se réécrit $f(a) = a^3 + ca$. On vérifie réciproquement que ces fonctions conviennent pour tout c, donc ce sont les seules solutions.