Inégalités

Théo Lenoir

Les exercices de ce TD sont corrigés dans le polycopié de cours sur les essentiels en inégalité.

1 Un carré est positif

Exercice 1 Soit $x > 0$. Montrer que $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 2 Soient x, y des réels strictement positifs. Montrer que $x + \frac{y^2}{x} \geqslant 2y$ et trouver les cas d'égalité.

Exercice 3 Montrer que $5x^2 + y^2 + 1 \geqslant 4xy + 2x$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 4 Soit a, b, c des nombres réels. Montrer que $2a^2 + 20b^2 + 5c^2 + 8ab - 4bc - 4ac \geqslant 0$ et trouver les cas d'égalité.

Exercice 5 Lemme du tourniquet : Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 6 Montrer que $x^2 + y^4 + z^6 \geqslant xy^2 + y^2 \times z^3 + xz^3$, et trouver les cas d'égalité.

Exercice 7 Montrer que si $ab + bc + ca = 1$ pour des réels positifs a, b, c, alors $a + b + c \geqslant \sqrt{3}$. Trouver les cas d'égalité.

2 Inégalité arithmético-géométrique

Exercice 8 Soit $x \geqslant 0$ un réel. Montrer que $1 + x^2 + x^6 + x^8 \geqslant 4 \times x^4$. Trouver les cas d'égalité

Exercice 9 Soit a, b, c, d positifs tels que $abcd = 1$. Montrer que $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd+bc+ad+ac+bd \geqslant 10$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 10 Soit a, b, c des réels positifs tels que $(a + 1)(b + 1)(c + 1) = 8$. Montrer que $a + b + c \geqslant 3$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 11 Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels positifs de produit 1. Montrer que $(1 + a_1) \ldots (1 + a_n) \geqslant 2^n$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 12 Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels positifs de somme n. Montrer que $(1 + \frac{1}{a_1}) \ldots (1 + \frac{1}{a_n}) \geqslant 2^n$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 13 Soit a, b, c, d des réels positifs de somme 1. Montrer que $\frac{bcd}{(1-a)^2} + \frac{acd}{(1-b)^2} + \frac{abd}{(1-c)^2} + \frac{abc}{(1-d)^2} \leqslant \frac{1}{9}$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 14 Soit a, b, c des réels positifs de produit $\frac{1}{8}$. Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + c^2b^2 \geqslant \frac{15}{16}$. Trouver les cas d'égalité.

3 Cauchy-Schwarz et mauvais élèves

Exercice 15 Soit $a_1 \ldots a_n$ des réels strictement positifs. Montrer que $\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \geqslant \frac{n^2}{a_1+\cdots+a_n}$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 16 Soit $a_1 \ldots a_n$ des réels. Montrer que $a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geqslant \frac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{n}$

Exercice 17 Montrer que si a, b, c sont des réels positifs tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, $\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ac} \geqslant \frac{3}{2}$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 18 Soit n un entier strictement positif, $a_1, \ldots, a_n$ n nombres réels strictement positifs, $b_1, \ldots, b_n$ n nombres réels strictement positifs. On supposes que $a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n$ et on note $S = a_1 + \cdots + a_n$.

— Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i+a_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{b_i+a_i}$

— Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i+a_i} \geqslant \frac{S}{2}$

4 Inégalité du réordonnement

Exercice 19 Soit a, b, c des réels. Montrer à l'aide de l'inégalité du réordonnement que $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$.

Exercice 20 Inégalité de Tchebychev. Montrer que si $a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n$ et $b_1 \geqslant \cdots \geqslant b_n$, alors $a_1 b_1 + \ldots a_n b_n \geqslant \frac{(a_1+\cdots+a_n)}{n}(b_1 + \cdots + b_n)$.

Exercice 21 Montrer que si (a_k) est une suite d'entiers strictement positifs deux à deux distincts, alors

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n} \geqslant n$$

Exercice 22 Inégalité de Nesbitt. Montrer que si a, b, c sont des réels strictement positifs, $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$.