PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 3 : ARITHMÉTIQUE
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 25 JANVIER 2021

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2006 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques,
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.
contact-pofm@animath.fr

Exercices Juniors

Exercice 1. Soit n un entier naturel tel que n divise 2^n. Montrer que $\frac{2^n}{n}$ est une puissance de 2.

Exercice 2. Trouver tous les couples (x, y) d'entiers naturels tels que :

$$x^2 - 4y^2 = 3$$

.

Exercice 3. Alice met 100 billes dans un sac. Sur chaque bille elle a écrit le carré d'un entier. Bob souhaite trouver deux billes dont la différence des numéros est un multiple de 7. Combien de billes doit-il piocher au minimum pour être sûr de remplir son objectif, quels que soient les numéros choisis par Alice au départ ?

Exercice 4. Trouver tous les couples (a, b) d'entiers naturels tels que :

$$ab + 85 = 12 \cdot \text{ppcm}(a, b) + 20 \cdot \text{pgcd}(a, b)$$

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de couples (a, b) d'entiers tels que :

$$a^2 + ab + b^2 = n$$

.

Exercice 6. Trouver tous les triplets (x, y, z) d'entiers strictement positifs tels que :

$$1005^x + 2011^y = 1006^z$$

Exercice 7. Soit $n \geqslant 3$ un entier naturel et soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n entiers naturels premiers entre eux dans leur ensemble tels que $\text{ppcm}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ divise $a_1 + a_2 + ... + a_n$. Montrer que le produit $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ divise $(a_1 + a_2 ... + a_n)^{n-2}$.

Exercice 8. Déterminer tous les couples (m, n) d'entiers strictement positifs tels que :

$$125 \times 2^n - 3^m = 271$$

Exercice 9. Trouver tous les triplets (m, n, p) d'entiers strictement positifs, avec p premier, tels que :

$$(m^3 + n)(n^3 + m) = p^3$$

Exercices Seniors

Exercice 10. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que n divise $a - b$. Montrer que n^2 divise $a^n - b^n$.

Exercice 11. Soit x un réel positif ou nul tel que x^2 et x^3 sont tous les deux des entiers. Montrer que x est entier.

Exercice 12. Soit $n \geqslant 3$ un entier naturel et soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n entiers naturels premiers entre eux dans leur ensemble tels que $\operatorname{ppcm}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ divise $a_1 + a_2 + ... + a_n$. Montrer que le produit $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ divise $(a_1 + a_2 ... + a_n)^{n-2}$.

Exercice 13. Alice et Bob jouent avec un jeu de 2020 cartes. Sur chaque carte est écrit un des entiers de 1 à 2020 (chaque entier apparaît sur exactement une carte). Alice commence en retirant du paquet une carte de son choix, portant le numéro a. Bob voit la carte qu'Alice a choisie, et décide de retirer la carte portant le numéro b. Puis Bob écrit sur un tableau un des deux polynômes $x^2 - ax + b$ ou $x^2 - bx + a$ au choix. La partie continue ainsi jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de cartes. A la fin de la partie, Bob gagne si tous les polynômes qu'il a écrits possèdent une racine entière, sinon Alice gagne. Montrer que Bob possède une stratégie gagnante.

Exercice 14. Trouver tous les triplets d'entiers strictement positifs (m, n, p), avec p premier, tels que :

$$(m^3 + n)(n^3 + m) = p^3$$

Exercice 15. Déterminer s'il existe une suite infinie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers strictement positifs vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. Tout entier strictement positif apparaît exactement une fois dans la suite ;
2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\prod_{i=1}^{n} a_i$ s'écrit comme puissance $n-$ième d'un entier.

Exercice 16. Montrer qu'il existe un entier $n < 10^6$ tel que l'écriture décimale de 5^n comporte au moins 6 zéros consécutifs.

Exercice 17. Montrez qu'il existe un entier naturel N, tel que pour tout entier $n \geqslant N$, il existe $a_1, a_2, \ldots, a_{2020}$ des entiers satisfaisant les conditions :

— $n = a_1 + a_2 + ... + a_{2020}$;
— $a_{2020} > a_{2019} > ... > a_1 \geqslant 1$;
— Pour tout $1 \leqslant i \leqslant 2019$, a_i divise a_{i+1}.

Exercice 18. Soit $a \geqslant 1$ un entier fixé. Montrer que l'ensemble des diviseurs premiers des nombres de la forme $2^{2^n} + a$ pour $n \in \mathbb{N}$ est infini.