Manipulations algébriques et raisonnement

Théo Lenoir

1 Factorisation

Exercice 1 Montrer que si n est un entier vérifiant $n \geqslant 2$, $4n^2 - 1$ n'est pas premier.

Exercice 2 Factoriser $a^4 + 4b^4$

Exercice 3 Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers strictement positifs tels que $ab - a - b = 12$.

Exercice 4 Factoriser $a^4 - b^4$.

Exercice 5 Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. Montrer que $n^4 + n^2 + 1$ n'est pas premier.

Exercice 6 Soit x un réel strictement positif tel que $x + \frac{1}{x} = \sqrt{2020}$. Que vaut $x^2 + \frac{1}{x^2}$?

Exercice 7 Quels sont les entiers k tels que pour tout réels a, b, c,

$$(a + b + c)(ab + bc + ca) + kabc = (a + b)(b + c)(c + a)$$

Exercice 8 Soit a et b deux réels tels que $a+b = 7$ et $ab = 3$. Que vaut a^3+b^3 ? On ne cherchera pas à exprimer a et b.

Exercice 9 Soit a et b des réels positifs tels que $\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} = 1$, montrer que $a^3 + b^3 = a + b$.

Exercice 10 Déterminer les triplets de réels (a, b, c) tels que $a(b^2 + c) = c(c + ab)$, $b(c^2 + a) = a(a + bc)$ et $c(a^2 + b) = b(b + ac)$

2 Viète

Exercice 11 Montrer la propriété suivante : soit a, b, c, d quatre réels. Si $a + b = c + d$ et $ab = cd$, alors $(a, b) = (c, d)$ ou $(a, b) = (d, c)$. On pourra calculer pour x un réel quelconque $(x - c)(x - d)$

Exercice 12 Montrer la propriété suivante : soit a, b, c, d, e, f six réels. Si $a + b + c = d + e + f$, $ab + bc + ac = de + ef + df$, $abc = def$ alors à permutation près $(a, b, c) = (d, e, f)$.

Exercice 13 Déterminer les réels non nuls x tels que $x + \frac{1}{x} = 2$.

Exercice 14 Déterminer tous les triplets de réels (a, b, c) qui vérifient le système d'équations suivant :

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

3 Maximum

Exercice 15 Déterminer tous les triplets (x, y, z) de réels positifs tels que $x = \sqrt{2y + 3}$, $y = \sqrt{2z + 3}$ et $z = \sqrt{2x + 3}$.

Exercice 16 Déterminer tous les triplets de réels (a, b, c) tels que $a(a - 1) = b - 1$, $b(b - 1) = c - 1$ et $c(c - 1) = a - 1$

Exercice 17 Déterminer tous les triplets (a, b, c) de réels strictement positifs tels que $a\sqrt{b}-c = a$, $b\sqrt{c}-a = b$, $c\sqrt{a} - b = c$.

4 Solutions

Solution de l'exercice 1 On a $4n^2-1=(2n)^2-1^2=(2n-1)(2n+1)$. De plus, comme $n \geqslant 2$, $2n-1 \geqslant 2\times 2-1 = 3>1$ et $2n+1 \geqslant 2\times 2+1=5>1$, donc $4n^2+1$ n'est pas premier.

Solution de l'exercice 2 Notons que $a^4+4b^4=(a^2)^2+(2b^2)^2$. Pour faire apparaître une identité de la forme x^2+y^2, on va faire apparaître du $2xy$, on a donc

$$a^4+4b^4=(a^2)^2+2a^2(2b^2)+(2b^2)^2-2a^2(2b^2)=(a^2+2b^2)^2-4a^2b^2=(a^2+2b^2)^2-(2ab)^2$$

Ainsi $a^4+4b^4=(a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab)$

Solution de l'exercice 3 Essayons de factoriser par a : $a(b-1)-b=12$. On pourrait factoriser par b, mais cela briserait la factorisation déjà faite, il faut donc plutôt essayer de factoriser par $b-1$. On a $a(b-1)-b=a(b-1)-(b-1)-1=(a-1)(b-1)-1=12$ donc $(a-1)(b-1)=13$. Comme a et b sont strictement positifs, $a-1$ et $b-1$ sont positifs. Comme 13 est premier, on a $(a-1,b-1)=(1,13)$ ou $(13,1)$. Ainsi $(a,b)=(2,14)$ ou $(14,2)$.

Il reste à vérifier les solutions : si $(a,b)=(2,14)$, $ab-a-b=28-2-14=26-14=12$. Si $(a,b)=(14,2)$, $ab-a-b=28-14-2=14-2=12$. Les couples solutions

Solution de l'exercice 4 On a $a^4-b^4=(a^2)^2-(b^2)^2=(a^2-b^2)(a^2+b^2)=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$

Solution de l'exercice 5 On essaie de faire apparaître une identité remarquable : $n^4+n^2+1=n^4+2n^2+1-n^2=(n^2+1)^2-n^2=(n^2+n+1)(n^2-n+1)$. Or si $n\geqslant 2$, $n^2+n+1\geqslant 4+2+1=7>1$ et $n^2-n+1=n(n-1)+1\geqslant 2+1=3>1$ donc n^2+n+1 n'est pas premiers

Solution de l'exercice 6 Pour faire apparaître $x^2+\frac{1}{x^2}$, on va élever au carré l'égalité $x+\frac{1}{x}=\sqrt{2020}$. On obtient $2020=x^2+\frac{1}{x^2}+2x\times\frac{1}{x}=x^2+\frac{1}{x^2}+2$, donc $x^2+\frac{1}{x^2}=2018$.

Solution de l'exercice 7 Supposons l'équation vérifiée pour un entier k. En prenant $a=b=c=1$, on obtient $3\times 3+k=2^3$, donc $k=8-9=-1$.

Il reste à vérifier que $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=(a+b)(b+c)(c+a)$ pour tout réel a,b,c. Or

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=a^2b+a^2c+abc+b^2c+b^2a+abc+c^2a+c^2b+abc-abc$$

donc

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+2abc$$

et

$$(a+b)(b+c)(a+c)=(ab+b^2+ac+bc)(a+c)=a^2b+ab^2+a^2c+abc+abc+^2c+ac^2+bc^2$$

donc

$$(a+b)(b+c)(a+c)=a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+2abc$$

.

Pour $k=-1$, on a bien pour tout réels a,b,c,

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)+kabc=(a+b)(b+c)(c+a)$$

L'unique solution est donc $k=-1$.

Solution de l'exercice 8 Essayons de factoriser : $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

Il reste à exprimer (a^2-ab+b^2) via $a+b$ et ab. Pour faire apparaître le a^2 et le b^2, on peut utiliser $(a+b)^2$. On a $a^2-ab+b^2=a^2+2ab+b^2-3ab=(a+b)^2-3ab$.

On a donc $a^3+b^3=(a+b)((a+b)^2-3ab)=7(7^2-9)=7\times 40=280$.

Solution de l'exercice 9 En multipliant par $(1+a)$ et $(1+b)$, on obtient $a(1+a)+b(1+b)=(1+a)(1+b)$ donc $a+a^2+b+b^2=1+a+b+ab$ donc $a^2+b^2=1+ab$. On a donc $a^2-ab+b^2=1$. Pour faire apparaître a^3+b^3, il suffit de multiplier l'égalité précédente par $a+b$: on a $a+b=(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ ce qui donne le résultat voulu.

Solution de l'exercice 10 Les égalités se réécrivent $ab(b-c)=c(c-a)$, $bc(c-a)=a(a-b)$ et $ca(a-b)=b(b-c)$. En multipliant ces trois égalités, on obtient $(abc)^2(c-a)(b-c)(a-b)=abc(c-a)(b-c)(a-b)$. En particulier deux cas se présentent :

— Soit $abc = 0$. Les égalités étant cycliques, supposons $a = 0$. Par la première égalité $c^2 = 0$ donc $c = 0$. Par la troisième égalité $b^2 = 0$ donc $b = 0$

— Soit deux des éléments parmi a, b, c sont égaux, on suppose $a = b$. Dans ce cas $bc(c - a) = 0$. Si $b = 0$ ou $c = 0$ on retombe dans le cas précédent, sinon $a = b = c$.

— Soit $abc = 1$, dans ce cas a, b, c. sont non nuls Les égalités se réécrivent : $b-c = c^2(c-a)$, $c-a = a^2(a-b)$ et $a - b = b^2(b - c)$. En particulier $a - b$, $b - c$ et $c - a$ sont de même signe, mais de somme nulle et on a donc nécessairement $a - b = b - c = c - a = 0$ i.e; $a = b = c$.

Solution de l'exercice 11 Soit x un réel, calculons comme indiqué $(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab = x^2 - (c + d)x + cd = (x - c)(x - d)$. En particulier pour $x = a$, on obtient que $(a - c)(a - d) = 0$ donc $a = c$ ou $a = d$.

Si $a = c$, $b = c + d - a = d$. Si $a = d$, $b = c + d - a = c$, donc $(a, b) = (c, d)$ ou (d, c)

Solution de l'exercice 12 On va calculer de même ce que vaut $(x - a)(x - b)(x - c)$ pour x un réel quelconque.

On a

$$(x - a)(x - b)(x - c) = (x^2 - (a + b)x + ab)(x - c) = x^3 - cx^2 - (a + b)x^2 + (ac + bc)x + abx - abc$$

donc

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc = x^3-(d+e+f)x^2+(de+ef+df)x-def = (x-d)(x-e)(x-f)$$

La dernière égalité est justifiée car on peut faire les mêmes premiers calculs en remplaçant (a, b, c) par (d, e, f).

Pour $x = a$, on obtient que $a = d$ ou e ou f.

— Si $a = d$, alors $a + b + c = d + e + f$ devient $b + c = e + f$ et comme $de + ef + df = ab + bc + ca = a(b + c) + bc = d(e + f) + bc$, on obtient $bc = ef$. Par la propriété précédente, $(b, c) = (e, f)$ ou (f, e), donc $(a, b, c) = (d, e, f)$ ou (d, f, e).

— Si $a = e$, alors $a + b + c = d + e + f$ devient $b + c = d + f$ et comme $de + ef + df = ab + bc + ca = a(b + c) + bc = e(d + f) + bc$, on obtient $bc = df$. Par la propriété précédente, $(b, c) = (f, d)$ ou (d, f), donc $(a, b, c) = (e, d, f)$ ou (e, f, d).

— Si $a = f$, alors $a + b + c = d + e + f$ devient $b + c = d + e$ et comme $de + ef + df = ab + bc + ca = a(b + c) + bc = f(d + e) + bc$, on obtient $bc = de$. Par la propriété précédente, $(b, c) = (e, d)$ ou (d, e), donc $(a, b, c) = (f, d, e)$ ou (f, e, d).

Dans tous les cas (a, b, c) est une permutation de (d, e, f) ce qui donne bien le résultat voulu.

Solution de l'exercice 13 On remarque que 1 est solution, il serait donc bien de prouver que $(x, \frac{1}{x}) = (1, 1)$ via Viète. On vérifie donc que ces deux couples ont même somme et même produit : $x + \frac{1}{x} = 2 = 1 + 1$ et $x\frac{1}{x} = 1 = 1 \times 1$. Donc d'après Viète, $(x, \frac{1}{x}) = (1, 1)$ ou $(x, \frac{1}{x}) = (1, 1)$. Bilan dans les deux cas $x = 1$. Réciproquement on vérifie que si $x = 1$, $x + \frac{1}{x} = 1 + 1 = 2$, donc l'unique solution est bien $x = 1$.

Solution de l'exercice 14 Ici, les équations sont très symétriques et font penser à des relations de Viète avec (a, b, c) et $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$. Notons tout d'abord que a, b, c ne peuvent être nuls. Pour obtenir une nouvelle équation, on peut essayer de faire apparaître des carrés via la première équation, puis d'utiliser la seconde.

Elevons au carré la première équation : on obtient :

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{ab} + \frac{2}{ac} + \frac{2}{bc}$$

En retranchant la seconde équation à celle-ci et en divisant par 2, on obtient

$$ab + bc + ca = \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}$$

On a deux relations sur les 3 ce qui n'est malheureusement pas suffisant pour Viète : essayons donc de les manipuler !

$$ab + bc + ca = \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = \frac{a + b + c}{abc}$$

et

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + bc + ac}{abc}$$

En combinant les deux équations,

$$a + b + c = \frac{ab + bc + ac}{abc} = \frac{a + b + c}{(abc)^2}$$

En particulier si $a + b + c \neq 0$, on obtient que $\frac{1}{(abc)^2} = 1$, donc $(abc)^2 = 1$ donc $abc = \pm 1$. Trois cas se présentent donc :

— Si $a+b+c=0$, on a $ab+bc+ca=\frac{a+b+c}{abc}=0$. Ainsi $0=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=a^2+b^2+c^2$, donc $a=b=c=0$ ce qui est impossible.
On aurait pu aussi obtenir cette contradiction en utilisant que si x est un réel, $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=x^3-abc$. En particulier pour $x=a$ on a $a^3=abc$, de même $b^3=abc=a^3=c^3$, donc $a=b=c$. Comme $a+b+c=3a=0$, on a $a=b=c=0$ ce qui est impossible.

— Si $abc=\pm 1$, on a $abc=\frac{1}{abc}$ qui est la troisième relation nécessaire pour utiliser Viète. On sait donc que (a,b,c) est une permutation de $(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c})$.
Si $a=\frac{1}{a}$, on a $a^2=1$ donc $a\pm 1$. Supposons que $a\neq\pm 1$, que $b\neq\pm 1$ et que $c\neq\pm 1$. Quitte à échanger b et c, comme (a,b,c) est une permutation de $(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c})$, $a=\frac{1}{b}$. Si $b=\frac{1}{a}$, alors $c=\frac{1}{c}$ ce qui est impossible. On a donc $b=\frac{1}{c}$ et $c=\frac{1}{a}$, donc $a=\frac{1}{b}=c=\frac{1}{a}$ contradiction.
Ainsi soit a,b,c vaut ± 1. Quitte à renommer les variables par symétrie, on peut supposer $a=\pm 1$, on a donc $a=\frac{1}{a}$, donc $(b,c)=(\frac{1}{b},\frac{1}{c})$ ou $(\frac{1}{c},\frac{1}{b})$. Dans le premier cas, on a $(a,b,c)=(\pm 1,\pm 1,\pm 1)$. Dans le second cas, on a $(a,b,c)=(\pm 1,b,\frac{1}{b})$

Réciproquement les triplets de la forme $(\pm 1,\pm 1,\pm 1)$, $(\pm 1,t,\frac{1}{t})$ avec t un réel non nul et leurs permutations sont solutions : en effet si $(a,b,c)=(\pm 1,\pm 1,\pm 1)$, $a=\frac{1}{a}$, $b=\frac{1}{b}$ et $c=\frac{1}{c}$ donc les équations sont vérifiées. Si $(a,b,c)=(\pm 1,t,\frac{1}{t})$, $a=\frac{1}{a}$, $b=\frac{1}{c}$ et $c=\frac{1}{b}$ donc les équations sont vérifiées. En fait on peut même oublier les triplets de la forme $(a,b,c)=(\pm 1,\pm 1,\pm 1)$, par principe des tiroirs on a deux variables égales (par exemple b et c, et dans ce cas $b=\frac{1}{c}$, donc on est ramené au deuxième cas. Les triplets solutions sont donc les permutations de triplets de la forme $(\pm 1,t,\frac{1}{t})$

On aurait pu aussi montrer dans le cas $abc=\pm 1$, que $a=\pm 1$ via l'astuce suivante.

Si $abc=1$, on a $a+b+c=ab+bc+ca$. Posons $S=a+b+c$. On sait que $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=x^3-sx^2+sx-1$. Pour $x=1$, on a $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-sx^2+sx-1=0$ donc $a=1$ ou $b=1$ et $c=1$. Le produit des deux restants valant 1 on obtient (a,b,c) est une permutation d'un triplet de la forme $(1,t,\frac{1}{t})$

Si $abc=-1$, on a $a+b+c=-(ab+bc+ca)$. Posons $S=a+b+c$. On sait que $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=x^3-sx^2-sx+1$. Pour $x=-1$, on a $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-sx^2-sx+1=-1-s+s+1=0$ donc $a=-1$ ou $b=-1$ et $c=-1$. On conclut alors en utilisant que le produit des deux autres vaut 1.

Solution de l'exercice 15 L'énoncé est cyclique : remplacer (x,y,z) par (y,z,x) ne change pas le système. On peut donc supposer que x est le maximum de (x,y,z). L'égalité $x=\sqrt{2y+3}$ implique que $x\leqslant\sqrt{2x+3}=z$, donc par maximalité, $x=z=\sqrt{2x+3}$. On a donc $x^2=2x+3$, donc $x^2-2x-3=0$, ce qui se réécrit $(x+1)(x-3)=0$, donc $x=3=z$. Or $y=\sqrt{2z+3}=\sqrt{9}=3$ donc $x=y=z=3$.

Réciproquement si $x=y=z=3$, $\sqrt{2x+3}=\sqrt{2y+3}=\sqrt{2z+3}=\sqrt{9}=3=x=y=z$, donc $(x,y,z)=(3,3,3)$ est bien l'unique solution.

Solution de l'exercice 16 L'énoncé est cyclique : remplacer (a,b,c) par (b,c,a) ne change pas le système. On peut donc supposer que a est le maximum de (a,b,c). On a $0\geqslant b-a=a(a-1)+1-a=(a-1)(a-1)=(a-1)^2\geqslant 0$ donc comme on a égalité dans les inégalités, $a=1$ et $a=b$. En particulier comme $b=1$, $c-1=b(b-1)=0$ donc $a=b=c=1$.

Réciproquement si $a=b=c=1$, comme $1(1-1)=1-1$, le triplet $(1,1,1)$ est bien l'unique solution.

Solution de l'exercice 17 L'énoncé est cyclique : remplacer (a,b,c) par (b,c,a) ne change pas le système. On peut donc supposer que a est le maximum de (a,b,c). La première équation donne que $a(\sqrt{b}-1)=c$. Si $b>4$, $c=a(\sqrt{b}-1)>a(2-1)=a$, ce qui contredit la maximalité de a. On a donc $b\leqslant 4$.

La deuxième équation se réécrit $b(\sqrt{c}-1)=a\geqslant b$, donc $\sqrt{c}-1\geqslant 1$ donc $\sqrt{c}\geqslant 2$, i.e. $c\geqslant 4$. Comme $a\geqslant c$, $a\geqslant 4$.

La troisième équation se réécrit $c(\sqrt{a}-1)=b$, or $4\geqslant b=c(\sqrt{a}-1)\geqslant 4\times(\sqrt{4}-1)=4(2-1)4$. On a donc égalité dans toutes les inégalités donc $a=b=c=4$.

Réciproquement si $(a,b,c)=(4,4,4)$, comme $4\sqrt{4}-4=4\times 2-4=4$, $(a,b,c)=(4,4,4)$ est l'unique solution du système.